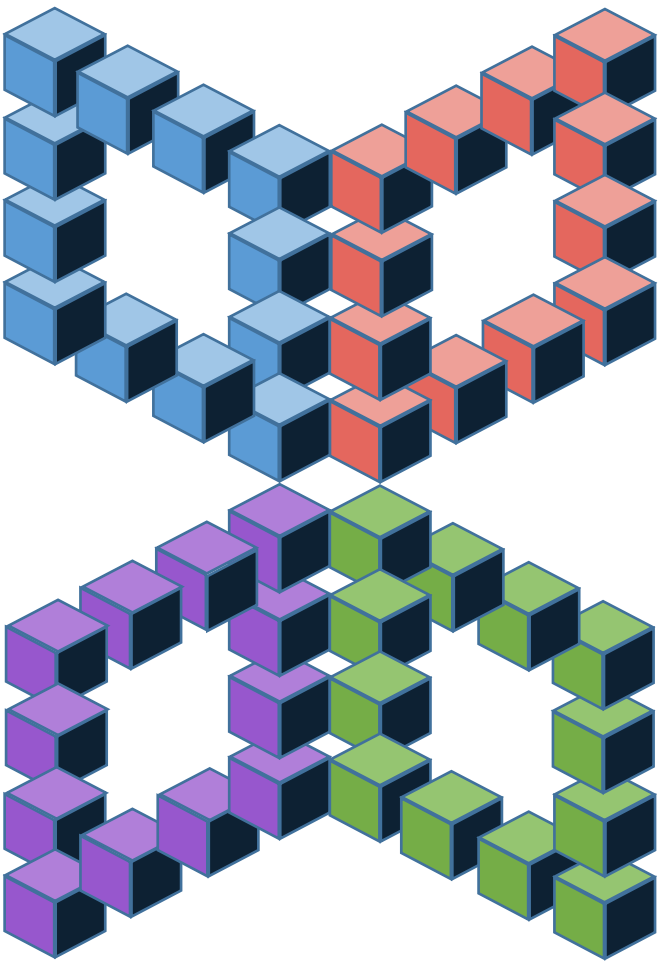
数学研究部機関誌

- π -



2019 年度 第 46 号 中央大学数学研究部

目次

巻頭言 …… 002
それいけ、数学研究部 …… 003
年間活動 …… 004
研究発表 …… 005
写像は「しゃじょー」 …… 006
同値をかいま見る …… 016
ぼくたちは数学ができない …… 022
実数論班 …… 028
ベクトル空間 …… 050
線形代数班 …… 060
束論 …… 066
数列の極限じゃい …… 076
広義積分 …… 082
differential equations …… 088
走れ部長 (距離ヌンティウス空間) …… 094
～解析班～ …… 102
確率・統計・伊藤班 …… 108
確率・統計・井上班 …… 120
確率不等式も無事ピロってます …… 128
少年の夢 2019 …… 138
編集後記 …… 152
部員一覧 …… 156

～巻頭言～

2020 年度部長 数学科 2 年　高橋 優太

機関紙を手に取り読んでくれてありがとうございます！数学研究部部長の高橋です！

この機関紙 π の発行が復活して今回で 13 年目になります。 機関紙を発行するにあたり各部員はもちろんのこと多くの方々のご協力があり今を迎えることができています。皆様本当にありがとうございます。

喜ばしいことに今年もたくさんの新入部員に恵まれ数学研究部は増々拡大していっています。今年度も今までに劣らない活躍を出せるよう我々一同頑張っていきます。

私たち数学研究部は各々取り組みたい分野を選びその分野でゼミ班を組み週 1 回 100 分のゼミを行っています。このゼミで学びあげたことをこの機関紙や白門祭や理科フェスと呼ばれるイベントなどで模造紙に書いたりなどし皆さんに発表しています。これだけではなく部員たちは夏合宿でも互いに自分のゼミ内容について発表し合い理解を深めたりもしています。

ゼミ活動以外にも先ほど書いた夏合宿などの行事もあり、また先輩後輩で娯楽を楽しんだりと部員間の仲は先輩後輩同期関わらず良いです。部室は結構にぎやかな雰囲気でみんな伸び伸びと日々活動しています。また部員間でゼミ以外でも数学の話をしあったりもしています。みんながやりたいことをやれていてよい環境です。

さてこの機関紙 π を読んでいくにあたりこれは私たちのゼミ班の軌跡を追うものです。読んでいく皆様にはぜひぜひ私たちと一緒に数学をやっている気持ちになっていただきたいのでぜひぜひ片手にペン、下には紙をご用意の上読んでみてください。

この機関紙を読んだ皆様が少しでも数学を学ぶことを好きになってくれることを心から願っています。ぜひ最後まで読んでみてください。では最後に

私たちと一緒に数学を楽しみましょう!!

数学の世界へいってらっしゃい!!

それいけ、数学研究部

顧問　高倉 樹

機関紙 π の発行、おめでとうございます。今年度も堂々たる歩みを刻むことができ、大変うれしく思います。

この原稿を書いているのは2019年12月下旬、ちょうどクリスマスの頃です。元号が平成から令和に変わり、世の中に新たな勢いが感じられるように思います。2020年には東京オリンピックも開催されます。新年および新年度への期待を込めて、タイトルを上記のように決めました。(とはいえ、アンパンマンみたいで、ちょっと軽かったかな。)

例によって、活動はすべて部員の自主性に任せています。11月の理工白門祭の会場に私も足を運んでみましたが、なかなかの盛況でした。小・中学生にも好評だったと聞いています。

白門祭後に恒例の委員の交代があり、部長が萩原君から高橋君へと変わりました。新委員のメンバーと先日話をしましたが、非常にポジティブなエネルギーを感じました。明るく自由な活動を展開してくれるものと期待しています。

さて、12月8日に法政大学で開催された理科サークルフェスタ2019では、

『理学部門 3位』

という立派な成績を収めました。幅広い年齢層に対応すべく、いろいろとアイデアを出し合って、随所に工夫を凝らしたとのことです。部員の皆さん全員の健闘を讃えたいと思います。

なお、今年度の部員はなんと86名で、ここ数年では最大規模です。(調べてみたところ、2011年度が95名で最多で、それに次ぐ2番目の人数でした。ちなみに、3番目は2010年度と2015年度の82名です。)内訳は

1年生 30名、2年生 28名、3年生 15名、4年生 13名

とのことです。そんな彼ら・彼女らの一年間の成果を、本誌 π を手に取って、じっくりと味わってみることにしましょう。

数学を通して友と多くを語り合い、充実した大学生活を送ってもらいたいと思います。数学研究部の、より一層の発展を願っています。

～年間活動内容～

数学研究部では6名ほどの班に分かれて活動しています. 班ごとに活動時間と研究分野を決め, 週1回集まってゼミを行います. 通常の活動は前期・後期の授業実施期間ですが、夏休み・春休みには班ごとに夏ゼミ・春ゼミを行います.

4月, 5月

4月に入学した1年生とお菓子パーティー・新入生歓迎会を通し, 親睦を深めます. また, 公開ゼミを2年生中心で行います.

8月, 9月

夏休み中にも班ごとに日にちを決め, 夏ゼミを開きます. さらに夏合宿ではゼミ発表やスポーツ大会を行います. 毎日笑顔があふれている数研ですが, その中でも大きいイベントです!

11月

白門祭では, 夏ゼミで各班が研究した内容を展示・発表します. クイズやパズルなどもあり, 様々な方と数学を通し交流できます.

12月

理科サークルフェスタという, 多くの大学が一同に集まり, その年の研究成果を発表するイベントに参加します. 他の大学の発表も見ることができます. 2019年は法政大学で開催されました.

2月

機関誌発行をします. 1年間を通じて各班が研究してきた成果をLaTeXでまとめ, それをこの1冊の本にしました。また, 来年に向けて春休み中にゼミを行います.

(ここにコメントを紹介していきます)

研究発表

写像は「しゃじょー」

1年　谷部達也
小池雄河
梅澤月奏
山崎もも
宮本泰彰

1　ゼミ紹介

　皆さんこんにちは！このたびゼミ班紹介を書くことになった蓮沼と申します.
班員集合の元じゃない？心の写像を通してみてください. きっと見えてくるはずです.
さて, 書きたいことは自分の班で書いたので, この班のメンバーの紹介でもしましょう.

矢部

班員紹介も飽きたので, 次の話題に移りましょう.
プリンキピアとプリキュアの語感が似ていることに関しては言われるまでもない周知の事実ですが, 両者の間に何かしらの関係があるのでしょうか？
プリンキピアと言えば, かのアイザック・ニュートンが著したニュートン力学体系の解説書でありますが, まあ正直私は物理教徒ではないので, 読んだ事はありません. それ故, ここに書いてあることは全くの出鱈目である可能性が非常に高いのですが, それでも私は構わないという方のみこの先に進んでほしいと思います.
話に入る前に,　一応プリキュアとぷよぷよの語感も似ていることを記しておきます.
ニュートンが万有引力の発想に至った理由は, リンゴが木から落ちたのを見たからだというのは有名な話ですが, 私はこのリンゴに何かしらの秘密があったのではないかと考えています.
旧約聖書に記されているアダムとイブ
―映画『失楽園』で有名でありますが―
一応簡単に概要をっ説明しておきましょう. アダムとイブとは, 前述の通り旧約聖書『創世記』に記されている最初の人間のことです. 唯一神ヤハウェが天地創造の終わりに創造されたとされています.
このアダムの創造後, ヤハウェは実のなる植物が創造されました. アダムはエデンの園におかれますが, アダムの創造以前はエデンの園の外には草木の一本もありませんでした.

理科系の数学入門シリーズの５以降がでてないのには理由があるらしいよ!!（クソ本）　（おたじい）

エデンの園と呼ばれる場所にはあらゆる種類の木が存在しているのですが, その中心には特別な木, —生命の木と知恵の木と呼ばれる— が生えていました. この二つの木は全て食べられる実をつけましたが, 主なる神はアダムに対し, 『善悪の知恵の実だけは食べてはならない』 と命令しました. 因みに, この時に命の木の実に対する言及はありませんでした.
その後, イブが創造されることとなります. 二人は仲睦まじく暮らすのですが, とある日, 一匹の蛇がイブに近づき, 善悪の知恵の実を食べるよう唆します.
善悪の知恵の実を食べてしまったイブは, アダムに対しても知恵のみを食べることを勧めます. 知恵の実を食べた二人はここで互いが裸であることに気が付き, 恥じて体をイチジクの葉で隠しました. というお話です. この後, 知恵の実を食べたことに対するきつーい罰があるのですが, そこの話は割愛します. 何故この話を書いたかというと, この話における知恵の実はふつうリンゴとして描写されるということに焦点を当てたかったからです (創世記には何も書かれていないにもかかわらず) 何故なのでしょうか？.
ここで一つの仮説が立ちます. . かのニュートンはリンゴが木から落ちたのを見たのではなく, 天から降ってきた『知恵の実』を食べて知識を得たのではないか, という仮説です.
とここまで書いたところで, プリキュアの登場人物に林檎とかアップルがいないことに気が付いて全部おじゃんになりました. おわり.

2　写像の定義と例

定義 1

X, Y を空でない集合とする.集合 X の各元をそれぞれ 1 つ対応させる規則 f が与える. この規則を集合 X から集合 Y への写像という.

定義 2

X の各元 x に対して x 自身を対応させる写像のこと.

$$1_X : X \to X, 1_X(x) = x \ (x \in X)$$

と表す.

定義 3

A を集合 X の部分集合とし, A の各元 a に対して a 自身を対応させる A から X への写像のこと.

$$i_A : A \to X, i_A(a) = a \ (a \in A)$$

定義 4

写像 $f : X \to Y$ を考える. また $A \subset X$ とすると, $a \in A$ は X の元でもあるので, $f(a) \in Y$ 定まる. これを写像 f の A への制限写像とよび, $f_{|A}$ と表す.

$$f_{|A} : A \to Y, f_{|A}(a) = f(a)(a \in A)$$

注意　対応規則が同じでも定義域や終域が異なる写像は, 別物と考える.

定義 5

次の 2 つが同時に成り立つこと.
1. 定義域, 終域が等しい.
2. 対応規則が等しい.

定義 6

f を集合 X から集合 Y への写像, g を Y から Z への写像とする.X の各元 x に対して x の f による像 $f(x)$ を g による像 $g(f(x))$ と対応させる. この対応を満たす X から Z への写像を f と g の合成写像とよび, 記号で

$$(g \circ f)(x) \quad \text{または} \quad g(f(x))$$

と表す.

例

集合 X から集合 Y への写像 $f : X \to Y$ と X の部分集合 A に対して,

$$f \circ i_A = f_{|A}$$

である.

＜証明＞
$f \circ i_A$と $f_{|A}$の定義域はともに A, 終域はともに Y である.
(∵ 合成写像, 包含写像, 制限写像の定義)
すなわち,

$$f \circ i_A : A \to Y, \quad f_{|A} : A \to Y$$

また, 任意の $a \in A$ に対して

$$(f \circ i_A)(a) = f(i_A(a)) = f(a) = f_{|A}(a)$$

である.
したがって, $f \circ i_A$と $f_{|A}$は定義域も終域も同じで, 対応規則も等しいので, $f \circ i_A = f_{|A}$ が成立.

定理 1

3 つの写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ の合成に関して, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ が成り立つ.

< 証明 > 以下の 2 つを示せばよい
(1) 定義域と終域が等しい (2) 対応規則が等しい

(1) について, 左辺は $g \circ f : X \to Z$ であるので $h \circ (g \circ f) : X \to W$ となる. また, 右辺は $h \circ g : Y \to W$ であるので $(h \circ g) \circ f : X \to W$ となり, 両辺で定義域と終域が等しい.

(2) について，左辺に $x \in X$ を代入すると，$h \circ (g \circ f)(x) = h \circ (g \circ f(x)) = h \circ (g(f(x))) = h(g(f(x))) = (h \circ g) \circ f(x)$ となり，対応規則が等しい．

3 全射, 単射, 全単射, 逆写像

定義 7

$f : X \to Y$ とする．
(1) $^{\forall}y \in Y,\ f(x) = y$ となる$^{\exists}x \in X$ が存在するとき，全射とよぶ．
(2) $x, x' \in X,\ x \neq x'$ならば，$f(x) \neq f(x')$ を満たすとき，単射とよぶ．
(3) 全射かつ単射のとき，全単射とよぶ．

(1) について
$X = \{1, 2, 3, 4\},\ Y = \{a, b, c\}$ とし，$f : X \to Y$ とする．
$f(1) = a,\ f(2) = b,\ f(3) = c,\ f(4) = c$ としたとき，f は全射である．

(2) について
$X = \{1, 2, 3\},\ Y = \{a, b, c, d\}$ とし，$f : X \to Y$ とする．
$f(1) = a,\ f(2) = b,\ f(3) = d$ としたとき，f は単射である．

(3) について
$X = \{1, 2, 3\},\ Y = \{a, b, c\}$ とし，$f : X \to Y$ とする．
$f(1) = a,\ f(2) = b,\ f(3) = c$ としたとき，f は全単射である．

$ex) f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とし，$f(x) = 2x + 1$ とすると，f は全単射であり，$f(x) = x^3 - x$ とすると f は全射であり，単射ではない．

定理 2

2 つの写像 $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ に関して次のことが成り立つ

(1) $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ がともに単射ならば, $g \circ f(x) : X \to Z$ は単射である. ただし, 逆は成り立つとは限らない.

(2) $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ がともに全射ならば, $g \circ f(x) : X \to Z$ は全射である. ただし, 逆は成り立つとは限らない.

(3) $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ がともに全単射ならば, $g \circ f(x) : X \to Z$ は全単射である.

(4) $g \circ f : X \to Z$ が単射ならば, $f : X \to Y$ は単射である. ただし, $g : Y \to Z$ は全射の場合も単射の場合もある.

(5) $g \circ f : X \to Z$ が全単射ならば, $g : Y \to Z$ は全射である. ただし, $f : X \to Y$ は全射の場合も単射の場合もある.

(6) $Z = X$ のとき, $g \circ f = 1_X$かつ $f \circ g = 1_Y$ならば, $f : X \to Y$ も , $g : Y \to Z$ も全単射である.

< 証明 >

(1) $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ がともに単射であるとし, $x_1,\ x_2 \in X, x_1 \neq x_2$とすると $f : X \to Y$ が単射であるので, $f(x_1) \neq f(x_2)$ である.
また, $g : Y \to Z$ が単射なので, $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ である.
よって, 条件「$x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2$ならば, $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$」が満たされているため, $g \circ f : X \to Z$ は単射である.

(2) $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ がともに全単射であると仮定すると,

$$^{\forall}y \in Y,\ ^{\exists}x \in X \quad s.t. \quad f(x) = y \quad \text{かつ} \quad ^{\forall}z \in Z,\ ^{\exists}y \in Y \quad s.t. \quad g(y) = z$$

が成立. よって,

$$^{\forall}z \in Z,\ ^{\exists}x \in X \quad s.t. \quad g(f(x)) = z$$

が成立するので, $g(f(x)) : X \to Z$ つまり, $g \circ f(x) : X \to Z$ は全単射である.

(3) (1), (2) より, $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ が全単射のとき, $g \circ f : X \to Z$ は全射かつ単射なので, $g \circ f : X \to Z$ は全単射である.

(4) $g \circ f : X \to Z$ が単射であるとすると,

$$^{\forall}x_1,\ x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2)$$

$f : X \to Y$ が単射でないと仮定すると, (背理法)

$$^{\exists}x_1,\ x_2 \in X \quad s.t. \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

が成立. つまり,

$$^{\exists}x_1,\ x_2 \in X \quad s.t. \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$$

が成立. $g \circ f : X \to Z$ は単射であるので矛盾.
よって, $f : X \to Y$ は単射である.

(5) $g \circ f : X \to Z$ が全射であるとする. $g \circ f : X \to Z$ が全射なので,

$$^{\forall}z \in Z, ^{\exists}x \in X \quad s.t. \quad (g \circ f)(x) = z$$

が成立. $y = f(x)$ とおくと, $y \in Y$ で,

$$\begin{aligned} g(y) &= g(f(x)) \\ &= (g \circ f)(x) \\ &= z \end{aligned}$$

である. したがって,

$$^{\forall}z \in Z, ^{\exists}y \in Y \quad s.t. \quad g(y) = z$$

が成立するので, $g : Y \to Z$ は全射である.

(6) $g \circ f = 1_X,\ f \circ g = 1_Y$のとき,

$$1_X : X \to X \text{ と } 1_Y : Y \to Y$$

は単射 ($\because$ (4)) なので, $f : X \to Y,\ g : Y \to X$ も単射.
また, $1_X : X \to X,\ 1_Y : Y \to Y$ は全射より, ($\because$ (5))

$$g : Y \to X,\ f : X \to Y$$

も全射.
よって, $f : X \to Y, g : Y \to Z$ は全単射.

定義 8

$f : X \to Y$ が全単射であるとき, Y のどのような元 y に対しても $f(x) = y$ となる X の元 x がただ一つ存在する. そこで, $y \in Y$ に対して, $f(x) = y$ となるただ一つの元 $x \in X$ を対応させることによって, Y から X への写像が定まる. この写像を写像 $f : X \to Y$ の逆写像 (inverse mapping) とよび, 記号で

$$f^{-1} : Y \to X$$

と表す.

定理 3

(1) $f : X \to Y$ が全単射であるとき,

$$f^{-1} \circ f = 1_X : X \to X, f \circ f^{-1} = 1_Y : Y \to Y.$$

(2) $f : X \to Y$ が全単射であるとき, その逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ も全単射で, $f^{-1} : Y \to X$ の逆写像は $f : X \to Y$ である :

$$(f^{-1})^{-1} = f : X \to Y.$$

(3) $g : Y \to X$ が $f : X \to Y$ の逆写像である必要十分条件は $g \circ f = 1_X$, $f \circ g = 1_Y$ となることである.

＜証明＞

(1) まず, $f : X \to Y$, $f^{-1} : Y \to X$ なので, $f^{-1} \circ f : X \to X$ となり, $f^{-1} \circ f$ の定義域および終域は $1_X : X \to X$ の定義域および終域とそれぞれ一致する. つぎに, 対応規則を考える. $x \in X$ とし, $f(x) = y$ とする. すると, 逆写像の定義より $f^{-1}(y) = x$ である. よって,

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x = 1_X(x)$$

である. したがって, 対応規則も両者は一致する. 以上により, 定義域, 終域, 対応規則ともに一致するので $f^{-1} \circ f = 1_X : X \to X$ である. 同様に, $f : X \to Y$, $f^{-1}Y \to X$ なので, $f \circ f{-}1 : Y \to Y$ となり, $f \circ f^{-1}$ の定義域および終域は $1_Y : Y \to Y$ の定義域および終域とそれぞれ一致する. つぎに, 対応規則を考える. $y \in Y$ とし,$x = f^{-1}(y)$ とすると, $f(x) = y$ である. よって,

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y = 1_Y(y)$$

である. したがって, 対応規則も両者は一致する. 以上により, 定義域, 終域, 対応規則

ともに一致するので, $f^{-1} \circ f = 1_Y : Y \to Y$ である.
(2) $f : X \to Y$ が全単射であるとする. (1) より $f^{-1} \circ f = 1_X, f \circ f^{-1} = 1_Y : Y \to Y$ である. よって, 定理 2 の (6) より $f^{-1} : Y \to X$ は全単射である.
$f^{-1} : Y \to X$ の逆写像を考える. まず, 逆写像の定義より, その定義域と終域を考えると, $(f^{-1})^{-1} : X \to Y$ であり, $f : X \to Y$ の定義域と終域にそれぞれ一致する. つぎに, 対応規則を考える. $x \in X$ に対して $y = f(x)$ とおくと,$x = f^{-1}(y)$ である. $f^{-1} : Y \to X$ の逆写像, $(f^{-1})^{-1} : X \to Y$ の定義により, $(f^{-1})^{-1}(x) = y$ である. よって, $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$ である. したがって, 定義域, 終域, 対応規則ともに一致するので $(f^{-1})^{-1} = f : X \to Y$ である.
(3)$g \circ f = 1_X, f \circ g = 1_Y$ とする. すると, 定理 2 の (6) より, $f : X \to Y, g : Y \to X$ ともに全単射である. $f : X \to Y$ が全単射なので, f の逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ が存在する. このとき,$g : Y \to X$ と逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ の定義域および終域はそれぞれ一致している. つぎに, 対応規則を考える. y を Y の任意の元とする. すると, 逆写像の定義により $f^{-1}(y) = x$ とおくとき, $y = f(x)$ である. したがって,

$$g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = 1_x(x) = x = f^{-1}(y)$$

となり, 対応規則も両者は一致する. 定義域, 終域, 対応規則ともに一致するので $g = f^{-1}$ である. すなわち $g : Y \to X$ は $f : X \to Y$ の逆写像である.
逆に, $g : Y \to X$ が $g : Y \to X$ は $f : X \to Y$ の逆写像であるとすると

定義 9

$f : X \to Y$ を写像とする. X の部分集合 A に対して, Y の部分集合 $\{f(x) \mid x \in A\}$ を f による A の像とよび, 記号で $f(A)$ と表す.
また,Y の部分集合 B に対して, X の部分集合 $\{x \in X \mid f(x) \in B\}$ を f による B の原像または逆像とよび, 記号で $f^{-1}(B)$ と表す.

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

定理 4

$f : X \to Y$ を写像とし, A, A_1, A_2 を X の部分集合, B, B_1, B_2 を Y の部分集合とする. そのとき次のことが成り立つ.
(1) $A_1 \subset A_2$ ならば $f(A_1) \subset f(A_2)$
(2) $B_1 \subset B_2$ ならば $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$
(3)$A \subset f^{-1}(f(A))$
(4)$f(f^{-1}(B)) \subset B$

＜証明＞
(1)
$y \in f(A_1)$ とすると, $y = f(x)$ となる $x \in A_1$ が存在する. $A_1 \subset A_2$ なので, $x \in A_2$ である. よって, $y = f(x)$ となる $x \in A_2$ が存在し, $y \in f(A_2)$ である. したがって, 「$y \in f(A_1)$ ならば, $y \in f(A_2)$」が成り立つので, $f(A_1) \subset f(A_2)$
(2)
$x \in f^{-1}(B_1)$ とすると, $f(x) \in B_1$ である. $B_1 \subset B_2$ なので, $f(x) \in B_2$ となる. よって, $x \in f^{-1}(B_2)$ である. したがって, 「$x \in f^{-1}(B_1)$ ならば, $x \in f^{-1}(B_2)$」が成り立つので $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$
(3)
$x \in A$ とする. このとき

$$f(x) \subset f(A)$$

である. よって逆像の定義より

$$x \in f^{-1}(f(A))$$

となる. 以上より

$$A \subset f^{-1}(f(A))$$

であるとわかる.
(4)
$y \in f(f^{-1}(B))$ とする. このとき以下のことが言える.

$$^{\exists}x \in f^{-1}(B) \ \text{ s.t. } \ y = f(x)$$

このとき $x \in f^{-1}(B)$ より $f(x) \in B$ であるすなわち

$$y \in B$$

となる. よって

$$f(f^{-1}(B)) \subset B$$

であるとわかる.

参考文献

福田拓生 著『集合への入門 (無限をかいま見る)』(培風館)

同値をかいま見る

1 年生　氏名 青木 隆星
赤田 莉奈
大里 真一
佐々木 侑香
佐久間 涼平

1　ゼミ紹介

乃木坂大好き青木隆星とダンス大好き K*nny の申し子佐々木侑香と塩豚骨ラーメンをしおぶたほねラーメンと読んでしまった赤田莉奈とルービックキューブ大好き大里真一とバスケとバレーと野球とカラオケが大好きなゼミに一回しか来たことがない佐久間涼平です。

2　同値と順序関係

定義 1

X を集合またはクラスとする. X の元の間の関係 R で, $X \times X$ の任意の元 (x, y) について, (x, y) が関係 R を集合 X 上の二項関係とよぶ. (x, y) が関係 R を満たすとき, 記号で xRy と書く.

定義 2

X を集合またはクラスとし R を X 上の二項関係とする.

(1) (反射律)X の任意の元 x に対して xRx であるとき, 二項関係 R は反射律を満たすという.
(2) (対称律)「xRy ならば yRx である」という命題を満たすとき, 二項関係 R は対称律を満たすという.
(3) (推移律)「xRy かつ yRz ならば xRz である」という命題を満たすとき, 二項関係 R は推移律を満たすという.
(4) (反対称律)「xRy かつ yRx ならば $x = y$ である」という命題を満たすとき, 二項関係 R は反対称律を満たすという.

定義 3

X を集合またはクラスとする．X 上の二項関係 R が反射律, 対称律, 推移律を満たすとき, R を X 上の同値関係とよぶ.

(1) (反射律)X の任意の元 X に対して xRx である.
(2) (対称律)xRy ならば yRx である.
(3) (推移律)xRy かつ yRz ならば xRz である.

定義 4

X を集合またはクラスとする．X 上の二項関係 R が反射律, 推移律, 反対称律を満たすとき, R を X 上の順序関係とよぶ.

(1) (反射律)X の任意の元 x に対して xRx である
(3) (推移律)xRy かつ yRz ならば xRz である
(4) (反対称律)xRy かつ yRx ならば $x = y$ である

例題

(1) $\leq$ が $\mathbb{R}$ 上の順序関係であることを示せ.
(2) $//$ が $L = \{l \mid l$ は平面上の直線 $\}$ 上の同値関係であることを示せ.
(3) $\subset$ が冪集合 $P(X) = \{A \mid A \subset X\}$ 上の順序関係であることを示せ.

(証明)
(1)
$x \in \mathbb{R}$ について

$$x \leq x$$

が成り立つので反射律を満たすとわかる.
$x, y \in \mathbb{R}$ について $x \leq y$ かつ $y \leq x$ のとき

$$x = y$$

となるので反対称律を満たすとわかる.
$x, y, z \in \mathbb{R}$ について $x \leq y$ かつ $y \leq z$ のとき

$$x \leq z$$

となるので推移律を満たす.
以上より $\leq$ が順序関係であるとわかる.

(2)
$l \in L$ について

$$l//l$$

よって反射律を満たすことがわかる.
$l, m \in L$ について $l//m$ であるとき

$$m//l$$

であるので対称律を満たすとわかる.
$l, m, n \in L$ について $l//m$ かつ $m//n$ のとき

$$l//n$$

よって推移律を満たすとわかる.
以上より$//$は同値関係であるとわかる.

(3)
$A \in P(X)$ について

$$A \subset A \iff {}^{\forall}a, a \in A$$

となるので反射律を満たすことがわかる.
$A, B \in P(X)$ について $A \subset B$ かつ $B \subset A$ であるとき

$$A \subset B \text{ かつ } B \subset A \iff {}^{\forall}a \in A, a \in B \text{ かつ}{}^{\forall}b \in B, b \in A$$

なので

$$A = B$$

となる. よって反対称律を満たすことがわかる.
$A, B, C \in P(X)$ について $A \subset B$ かつ $B \subset C$ ならば

$$A \subset B \text{ かつ } B \subset C \iff {}^{\forall}a \in A, a \in B \text{ かつ}{}^{\forall}b \in B, b \in C$$

より

$$A \subset C \iff {}^{\forall}a \in A, a \in C$$

となるので推移律を満たすとわかる.
以上より $\subset$ は順序関係であることがわかる.

定義 5

X：集合またはクラス　$R : X$ 上の同値関係　とする.
$x, y \in X$ が xRy のとき, x と y は **R-同値** であるという.
X の元 x に対し, x に R-同値な X の元全体の集まりを x の **R-同値類**または単に**同値類**とよび, 記号 $[x]_R$または単に $[x]$ で表す:

$$[x]_R = [x] = \{y \in X \mid yRx\}$$

この R-同値類 $[x]_R$ に対し, 任意の元 $y \in [x]_R$ を同値類 $[x]_R$ の**代表元**とよぶ.

定理 1

X：集合またはクラス　$R : X$ 上の同値関係　$x, y \in X$　とする.
そのとき, 次の性質が成り立つ.

(1) $x \in [x]_R$
(2) $xRy \iff [x]_R = [y]_R$
(3) $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$ ならば $[x]_R = [y]_R$

(証明)

(1) 反射律より xRx なので, $x \in [x]_R$ である.
(2) ($\Longleftarrow$ を示す.)
$[x]_R = [y]_R$ とする. すると, (1) より $x \in [x]_R$ なので, $x \in [y]_R$ すなわち xRy である.
($\Longrightarrow$ を示す.)
xRy とし, $z \in [x]_R$ とする. すると, zRx である. 仮定より xRy なので, 推移律より zRy である. したがって, $z \in [y]_R$ であるから, $[x]_R \subset [y]_R$ である.
同様に, $[x]_R \supset [y]_R$ である.
ゆえに, $[x]_R = [y]_R$ である.
(3) $x, y \in X$ で, $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$ とする. すると, $z \in [x]_R \cap [y]_R$ となる元 $z \in X$ が存在する. すなわち, $z \in [x]_R$ かつ $z \in [y]_R$ なので, zRx かつ zRy である.
対称律より, xRz かつ zRy である. したがって, 推移律より, xRy である.
(2) より $[x]_R = [y]_R$ である.

定義 6

集合 X 上に同値関係 R が与えられたとき以下のように分割することができる.

$$X = \bigcup_{x \in X} [x]_R \text{かつ } x, y \in X \text{ かつ } [x]_R \neq [y]_R \text{ならば } [x]_R \cap [y]_R = \phi$$

このように R-同値類の和に分割することを R に関して分類するという.

定義 7

集合 X 上に同値関係 R が与えられているとき R-同値類の集まりを商集合といい $X \backslash R$ と表す, またそれは以下のようなものである.

$$X \backslash R = \{[x]_R \mid x \in X\}$$

定義 8

$(X, \preceq)$ を半順序集合とする. X の任意の 2 元 x, y に対して関係 $x \preceq y$ または $y \preceq x$ の少なくとも一方が成り立つとき, $(X, \preceq)$ は全順序集合とよばれる.

定義 9

$(X, \preceq)$ を半順序集合とし, A を X の空でない部分集合とする.
A の元 x が, A のすべての元 a に対して $x \preceq a$ であるとき, x を A の最小元とよぶ. A の最小元を記号で $\min A$ と表す.

定義 10

半順序集合 $(X, \preceq)$ は, X の空でない部分集合が最小元をもつとき, 整列集合とよばれる. また, このとき, 順序関係 $\preceq$ を X 上の整列順序とよぶ.

定義 11

$(X, \preceq)$ を整列集合とする. そのとき, X の元 a に対して, 集合

$$X\langle a \rangle = \{x \in X \mid x \prec a \ (x \preceq \text{かつ } x \neq a)\}$$

を元 a による X の切片とよぶ. また, 半順序集合 $(X\langle a \rangle, \preceq)$ のことも元 a による整列集合 $(X, \preceq)$ の切片とよぶ.

定理 2

(1) 整列集合 $(X, \preceq)$ は全順序集合である.
(2)$(X, \preceq)$ の任意の切片 $(X\langle a\rangle, \preceq)$ は整列集合である.
(3)X の元 a, b に対して, $a \prec b$ ならば $X\langle a\rangle = (X\langle b\rangle)\langle a\rangle$ である.

(証明)

(1) X がただ 1 つの元からなる集合のときはもちろん $(X, \preceq)$ は全順序集合である. X が 2 つ以上の元をもつとする. x, y を X の相異なる元とすると, $(X, \preceq)$ が整列集合なので, X の部分集合 $\{x, y\}$ は最小元をもつ. $\min\{x, y\} = x$ のときは $x \preceq y$ であり , $\min\{x, y\} = y$ のときは $y \preceq x$ であるので, $(X, \preceq)$ は全順序集合である.

(2) $(X\langle a\rangle, \preceq)$ を $(X, \preceq)$ の切片とする. A を $X\langle a\rangle$ の空でない部分集合とすると, A は X の空でない部分集合である. $(X, \preceq)$ が整列集合なので A の最小元が存在する. よって, $(X\langle a\rangle, \preceq)$ は整列集合である.

(3) $X\langle b\rangle \subset X$ なので, 切片の定義により $X\langle a\rangle \subset (X\langle b\rangle)\langle a\rangle$ である. 一方, $x \in X\langle a\rangle$ とすると, $x \in X$ かつ $x \prec a$ である. いま, $a \prec b$ なので $x \prec b$ である. よって, $x \in X\langle b\rangle$ かつ $x \prec a$ なので $x \in (X\langle b\rangle)\langle a\rangle$ となる. したがって「$x \in X\langle a\rangle$ ならば $x \in (X\langle b\rangle)\langle a\rangle$ 」が成り立つので, $X\langle a\rangle \subset (X\langle b\rangle)$ である. 以上のことより, $X\langle a\rangle \supset (X\langle b\rangle)\langle a\rangle$ かつ $X\langle a\rangle \subset (X\langle b\rangle)\langle a\rangle$ なので, $X\langle a\rangle = (X\langle b\rangle)\langle a\rangle$ である.

参考文献

福田拓生著　『集合への入門　[無限をかいま見る] 』 (培風館)

ぼくたちは数学ができない

3 年　秋沢 求
2 年　牛木 京平
大垣 怜以
大坪 翔

1　班紹介

ふんす.

2　直積と二項関係

集合のいろいろ

この節で基本となる集合を紹介する. X, Y はそれぞれ集合とする.

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ かつ } y \in Y\}$$
$$X^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X \text{ かつ } x_2 \in X\}$$
$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

X 上の二項関係とは, X^2 の部分集合のことである. この部分集合を R と表すことにすれば, $R \subset X^2$ が成立する.

また, x_1, x_2 が R という二項関係に含まれるとき, $x_1 R x_2$ と書く. すなわち

$$x_1 R x_2 \overset{\text{def}}{\iff} (x_1, x_2) \in R$$

である.

二項関係には様々な性質がある. 以下にその例を挙げる.

反射的	$^\forall x, (xRx)$
対称的	$^\forall x, ^\forall y, (xRy \Longrightarrow yRx)$
反対称的	$^\forall x, ^\forall y, (xRy \text{ かつ } yRx \Longrightarrow x = y)$
推移的	$^\forall x, ^\forall y, ^\forall z, (xRy \text{ かつ } yRz \Longrightarrow xRz)$
非反射的	$^\forall x, (xRx \text{ でない})$
普遍的	$R = X^2$

同値関係とは, 反射的, 対称的, 推移的な二項関係であった. また順序関係とは, 反射的, 反対称的, 推移的な二項関係であった.

3　集合と二項関係における順序

一般の集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について, これは $\subset$ を二項関係として順序集合になる. すなわち $(\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}, \subset)$ は順序集合である.

証明　反射的, 反対称的, 推移的であることを確かめればよい. 任意の集合 X について $X \subset X$ は成立するので, $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の元についてもそれぞれ $X_\lambda \subset X_\lambda$ が成立して反射的である. また, $X_{\lambda_1} \subset X_{\lambda_2}$かつ $X_{\lambda_2} \subset X_{\lambda_1}$ が成立しているとき, 集合についての $=$ の定義から $X_{\lambda_1} = X_{\lambda_2}$ が成立して反対称的である. 最後に, $X_{\lambda_1} \subset X_{\lambda_2}$かつ $X_{\lambda_2} \subset X_{\lambda_3}$ が成立しているとき, X_{λ_1} の任意の元 x を固定すると, $X_{\lambda_1} \subset X_{\lambda_2}$ より $x \in X_{\lambda_2}$ であり, また $X_{\lambda_2} \subset X_{\lambda_3}$ より $x \in X_{\lambda_3}$ となる. x の任意性から $X_{\lambda_1} \subset X_{\lambda_3}$ が成立して推移的である. □

このことから, 例えば冪集合 $\mathfrak{P}(X)$ も $(\mathfrak{P}(X), \subset)$ として順序集合になる. これは特にブール代数, すなわち任意の元に補元が存在する分配束である.

集合に二項関係が定まるということは, 二項関係にも順序を定めることが出来る. ここでは特に, 同値関係について考察してみよう. 集合 X 上の同値関係を $\sim$ で表すことにする. すなわち

$$\sim \subset X^2$$

である.

同値関係として最も小さい集合 $\sim_0$ を考える. $\sim_0$ は反射的であるので少なくとも $\emptyset$ ではない. より具体的には ${}^\forall x, xRx$ より, ${}^\forall x, (x,x) \in \sim_0$ であり, $\Delta \subset \sim_0$ である. では逆に, $\sim_0 \subset \Delta$ となっているかを確認してみよう. これが成立していれば $\Delta = \sim_0$ が言える.

この確認の方針としては, Δ が同値関係であることを示すことになる. なぜならば, 今 $\sim_0$ は同値関係の中で最小のものとして考えているので, Δ が同値関係であれば必然的に $\sim_0 \subset \Delta$ となるからである.

確認　Δ が同値関係であること, すなわち反射的, 対称的, 推移的であることをを確認すればよい. Δ の定義から ${}^\forall x, (x,x) \in \Delta$, すなわち ${}^\forall x, x\Delta x$ でるので反射的である. 次に $x\Delta y$ とするが, Δ の定義から $x\Delta y$ となるのは $x = y$ のときである. それを注意したうえで $y\Delta x$ を見ると, これは確かに成立しているので対称的である. 最後に $x\Delta y$ かつ $y\Delta z$ とするが, 先と同様に $x = y$ と $y = z$ であり, よって $x = z$ である. これに注意して $x\Delta z$ を見れば, これもやはり成立して推移的である. □

このことから

$$\Delta = \sim_0$$

が示されたことになる.

今度は逆に, 最も大きな同値関係 $\sim_1$ を考えたいが, これは X^2 である. つまり普遍的な二項関係なのだが, 普遍的であれば反射的かつ対称的かつ推移的であることを確認する必要がある. ここでは省略する.

ここで同値関係を簡単に可視化してみよう. 下に示すのは $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ としたときの $\sim_0$ と $\sim_1$ である. ただし, 例えば a 行 c 列に $\bullet$ があることが aRc を示すものとする.

$\sim_0$	a	b	c	d	e	f	g	h
a	$\bullet$							
b		$\bullet$						
c			$\bullet$					
d				$\bullet$				
e					$\bullet$			
f						$\bullet$		
g							$\bullet$	
h								$\bullet$

$\sim_1$	a	b	c	d	e	f	g	h
a	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
b	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
c	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
d	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
e	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
f	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
g	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
h	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$

では, 以下に示すような同値関係 $\sim_\alpha$, $\sim_\beta$, $\sim_\gamma$, $\sim_\delta$ を考えてみよう.

$\sim_\alpha$	a	b	c	d	e	f	g	h
a	$\bullet$	$\bullet$						
b	$\bullet$	$\bullet$						
c			$\bullet$	$\bullet$				
d			$\bullet$	$\bullet$				
e					$\bullet$	$\bullet$		
f					$\bullet$	$\bullet$		
g							$\bullet$	$\bullet$
h							$\bullet$	$\bullet$

$\sim_\beta$	a	b	c	d	e	f	g	h
a	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$				
b	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$				
c	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$				
d	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$				
e					$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
f					$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
g					$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
h					$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$

$\sim_\gamma$	a	b	c	d	e	f	g	h
a	●							
b		●						
c			●					
d				●				●
e					●		●	
f						●		
g					●		●	
h				●				●

$\sim_\delta$	a	b	c	d	e	f	g	h
a	●	●						
b	●	●						
c			●	●				●
d			●	●				●
e					●	●	●	
f					●	●	●	
g					●	●	●	
h			●	●				●

先に結論から言ってしまえば, 集合 $\{\sim_0, \sim_\alpha, \sim_\beta, \sim_\gamma, \sim_\delta, \sim_1\}$ に順序 $\subset$ を与えると

$$\sim_0 \subset \sim_\alpha, \sim_\beta, \sim_\gamma, \sim_\delta, \sim_1$$
$$\sim_\alpha \subset \sim_\beta, \sim_1$$
$$\sim_\beta \subset \sim_1$$
$$\sim_\gamma \subset \sim_\delta, \sim_1$$
$$\sim_\delta \subset \sim_1$$

が成立する順序集合となる.

このとき, x と y が同値であるということは $\sim_0$ では $x = y$ に限るが, $\sim_1$ ではどのような対に対しても成立する. このことから, $\sim_0$ は同値関係として最も強い条件を要請しており, 逆に $\sim_1$ は最も弱い条件を要請していることになる.

すなわちこのとき考えている順序は条件の強さ, 弱さを比較するものと言い換えられる.

4 同値類

同値関係を考えると, 同時に同値類を考えられた. X 上に同値関係 $\sim$ を与えたとき, x の同値類 $[x]$ とは, x に対して同値となる X の元全体

$$[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$$

である.

以下の定理は同値関係が反射的, 対称的, 推移的であることから分かる.

(1) $x \in [x]$.

(2) $x \sim y \iff [x] = [y]$.

(3) $[x] \cap [y] \neq \emptyset \Longrightarrow [x] = [y]$.

証明は省略する.

また, 集合 X について同値関係 $\sim$ によって得られる同値類を (重複を除いて) 集めた集合を集合 X の同値関係 $\sim$ による商集合と呼び, $X/\sim$ と書く.

先の同値関係の例を用いて具体例を見てみよう. ここでは複数の同値関係が出てくるので, 混乱の無いよう, 例えば同値関係 $\sim_a$ による x の同値類を $[x]_a$ と書くことにする.

今, 同じ集合に与えたふたつの同値関係 $\sim_\lambda$ と $\sim_\mu$ について, $\sim_\lambda \subset \sim_\mu$ だったとしよう. このとき, 任意の元 x について $[x]_\lambda \subset [x]_\mu$ が成立する.

証明　$\sim_\lambda \subset \sim_\mu$ を仮定して任意の元 x について $[x]_\lambda \subset [x]_\mu$ となることを示せばよい. $x \in X$ を固定して $[x]_\lambda$ を考える. ここからまた任意の元 $y \in [x]_\lambda$ を固定する. すなわち $y \sim_\lambda x$ である. このとき仮定から $y \sim_\mu x$ が成立して, $y \in [x]_\mu$ が従う. y の任意性から $[x]_\lambda \subset [x]_\mu$ が成立し, x の任意性から証明が終わる. □

このことから, $\sim_\lambda \subset \sim_\mu$ とは集合の元を分類する粗さの順序とも言えることが分かる.

5　選択公理

集合 I を添字の集合とする集合族 $\{A_i\}_{i\in I}$ に対して, その直積 $\prod_{i\in I} A_i$ を次のように定義する.

集合族の直積

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \;\middle|\; \text{すべての } i \in I \text{ に対し } f(i) \in A_i \right\}$$

選択公理

集合族 $\{A_i\}_{i\in I}$ が空集合を含んでいないならば, 直積集合 $\prod_{i\in I} A_i$ は空集合でない.

また選択公理は次のように言い換えることが出来る.

言い換え

集合族 $\{A_i\}_{i\in I}$ が空集合を含んでいないならば, 集合族 $\{A_i\}_{i\in I}$ に属する各集合 A_i から 1 つずつ要素を選ぶことが出来る.

選択公理っぽくなってきたところで選択公理の裏を証明する.

命題　集合族 $\{A_i\}_{i\in I}$ が空集合を含んでいれば, 直積集合 $\prod_{i\in I} A_i$ は空集合である.

証明　集合族 $\{A_i\}_{i\in I}$ が空集合を含んでいるとする. すると, ある添字 $i_0 \in I$ に対して $A_{i_0} = \emptyset$ となる. 直積集合 $\prod_{i\in I} A_i$ の元 $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ は, 条件「すべての

$i \in I$ に対して, $f(i) \in A_i$」を満たさなければならない. しかしながら, $A_{i_0} = \emptyset$ なので, この添字 $i_0 \in I$ に対して $f(i) \in A_{i_0} = \emptyset$ となる写像 $f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ は存在しない. したがって, $\prod_{i \in I} A_i$ は空集合である. □

6 濃度とは

無限集合の濃度

無限集合の大きさを濃度という. 集合 A の濃度を $\#A$ とあらわす.
$\#A = \#B \overset{\text{def}}{\iff}$ 集合 A から集合 B への全単射が存在する.

例 1　自然数の集合 $\mathbb{N}$ と正の偶数の集合 $2\mathbb{N}$ の濃度は等しい.

証明　全単射写像 $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ が存在することを証明する. 写像 f を $f(x) = 2x$ と定義する. $g \in 2\mathbb{N}$ とするとこれは偶数なので, $n \in \mathbb{N}$ を用いて $g = 2n$ と表せる. すなわち $n = \frac{g}{2}$ が成立する.

これは, 任意の g に対して, $g = f(n)$ となるような n がただ一つ存在することをあらわしているので, 写像 $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ は全単射である. よって, 自然数の集合 $\mathbb{N}$ と, 正の偶数の集合 $2\mathbb{N}$ の濃度は等しい. □

このように, 一見大きさの違うような二つの集合でも, 濃度が等しいことがある. 次の例も, まったく大きさが異なっているような二つの集合だが, 濃度は等しくなる.

例 2　整数の集合 $\mathbb{Z}$ と, 自然数の集合 $\mathbb{N}$ の濃度は等しい.

「整数と自然数なんて, 倍近く個数が違うじゃないか. 」と思った人もいるだろう. だが, これも同じように証明していくと, 濃度が等しいことが分かる.

証明　全単射写像 $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ が存在することを証明する.

$$g(x) = \begin{cases} (x-1)/2 & (x : \text{奇数}) \\ -x/2 & (x : \text{偶数}) \end{cases}$$

と定義する. $n \in \mathbb{N}$ とする. n が奇数の時, ある $z \geq 0$ に対して $z = (n-1)/2$, すなわち $n = 2z + 1$ が成り立つ. また n が偶数の時, ある $z < 0$ に対して, $z = -n/2$, すなわち $n = -2z$ が成り立つ.

これらの式はそれぞれ, 任意の z に対して, $z = f(n)$ となるような n がただ一つ存在していることをあらわしているので, 写像 $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ は全単射である. よって, 整数の集合 $\mathbb{N}$ と自然数の集合 $\mathbb{Z}$ の濃度は等しい. □

このように, それぞれの集合は濃度が等しいことが分かった. 大きさが異なるように思える二つの集合だが, 数学的に見ていくと直観とは異なった結論が出てくることもある. 我々も直観だけに頼ることなく, 数学的視点というものを常に持っておきたい.

実数論班

3 年　浅賀 春貴
2 年　中畝 芽衣 根本 涼帆
福田 光紗 松本 亜弓

どうも, おはようございます, こんにちわ, こんばんわ. 実数論班です！私たち実数論班は謎に家族構成があります. 少しばかし紹介させていただきます.

大黒柱なんでしょうか. よくわかんないけど背中はでかいと言われています. 父担当の松本です.
一つ一つの言葉に重みと温かみを兼ね備えています. 恋愛の悩み, 人生の悩み, 時には自分がふと悲しくなることもありますがみんなを支えています. 母担当の福田です.
ご飯をいっぱい食べたいお年頃. 「いっぱい食べる君が好き, ペロリとおかわり〜」このフレーズがとっても似合います. 姉御担当の根本です.
最近反抗期なのでしょうか. 父に冷たくあたってきます. でもお父さん以外には優しいんですよ！敢えて父に振り向かないだけです. 妹御（いもご）担当の中畝です.
ゼミに来るのか否かは LINE の既読が付くか付かないか. 来た時には優しく数学を教えてくれます. はとこ担当の浅賀です.
とまあ, こんな感じで仲のいい実数論ファミリーです.

1.1 加法の公理

公準 1
$\mathbb{R}$ は集合である.

定義 1.1.1
$\mathbb{R}$ の元を実数という.

公準 2
$+$ は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像である.

定義 1.1.2
$+$ を $\mathbb{R}$ の加法という.

定義 1.1.3
$(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の写像 $+$ による像 $+((a,b))$ を $a+b$ と書き,
a と b との和という. また, $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ から $a+b$ を求めることを, a に b を加えるという.

公準 3
0 は $\mathbb{R}$ の元である.

公準 4
$-$ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像である.

定義 1.1.4
$a \in \mathbb{R}$ の写像 $-$ による像 $-(a)$ を $-a$ と書き, a の反数という. また, $a \in \mathbb{R}$ から $-a$ を求めることを, a の符号を変えるという.

定義 1.1.5
$(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ に $a+(-b) \in \mathbb{R}$ を対応させる. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像を減法といい, $-$ で表す. $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の写像 $-$ による像 $-((a,b))$ を $a-b$ と書き, a と b の差という. また,

$$(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

から $a-b$ を求めることを, a から b を引くという.

公理 1 (加法の公理)
写像 + は次の諸法則を満たす.
(i) いかなる a, $b\in\mathbb{R}$ に対して

$$a+b=b+a$$

(可換法則)

(ii) いかなる $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$ に対して

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

(結合法則)

(iii) (0 の性質) いかなる $a\in\mathbb{R}$ に対して

$$a+0=a$$

(iv) (反数の性質) いかなる $a\in\mathbb{R}$ に対して

$$a+(-a)\ =\ 0,\ \text{すなわち}\ a-a=0$$

定理 1.1.1
いかなる a, $b\in\mathbb{R}$ に対して

$$b+x=a$$

を満たす $x\in\mathbb{R}$ がただ 1 つ存在して, $a-b$ に等しい.

証明
まず, $x=a-b$ が $b+x=a$ を満たすことをいう.

$$\begin{aligned}
b+(a-b) &= b+(a+(-b)) && (-\text{ の定義})\\
&= b+((-b)+a) && (\text{可換法則})\\
&= (b+(-b))+a && (\text{結合法則})\\
&= 0+a && (\text{反数の性質})\\
&= a+0 && (\text{可換法則})\\
&= a && (0\text{ の性質})
\end{aligned}$$

よって, $x=a-b$ は $b+x=a$ を満たす.
次に $b+x=a$ を満たす $x\in\mathbb{R}$ は $a-b$ に一致することをいう.

$$b+x=a$$

であったとして, 両辺に左から $-b$ を加えれば

$$\begin{aligned}
(-b)+(b+x) &= (-b)+a && \text{(結合法則, 可換法則)}\\
((-b)+b)+x &= a+(-b) && \text{(可換法則, 定義 1.1.5)}\\
(b+(-b))+x &= a-b && \text{(反数の法則)}\\
0+x &= a-b && \text{(可換法則)}\\
x+0 &= a-b && \text{(0 の性質)}\\
\therefore x &= a-b
\end{aligned}$$

これで, $b+x=a$ を満たす $x\in\mathbb{R}$ はただ 1 つ存在して, $a-b$ であることがわかった.

□

定理 1.1.2
いかなる $a\in\mathbb{R}$ に対しても $-(-a)=a$

証明
$a\in\mathbb{R}$ とすれば、加法の公理より

$$\begin{aligned}
a+(-a) &= 0 && \text{(加法の公理（iv）)}\\
a+(-a) &= (-a)+a=0 && \text{(加法の公理（i）)}
\end{aligned}$$

他方, $-a$ の反数が $-(-a)$ であるから,

$$-a+(-(-a)=0$$

他方, $-a$ の反数が $-(-a)$ であるから,
ここで、定理 1 より, $-a+x=0$ を満たす x はただ一つしかないから,

$$-(-a)=a$$

□

定理 1.1.3
いかなる $a,b\in\mathbb{R}$ に対しても $-(a+b)=(-a)+(-b)$

証明

撮影会社から来た者です. 今回の合宿に同行します.（↑ $m\phi cchan$）

$a, b \in \mathbb{R}$ とすれば, （加法の公理より）

$$(a+b)+(-(a+b))=0$$

他方, $(a+b)+((-a)+(-b)) = ((a+b)+(-a))+(-b)$ (加法の公理（ii）)

$= ((b+a)+(-a))+(-b)$ (加法の公理（i）)

$= (b+(a+(-a)))+(-b)$ (加法の公理 (iii))

$= b+(-b)$ (加法の公理（iv）)

$= 0$

つまり, $(a+b)+((-a)+(-b))=0$

定理 1.1.1 より, $(a+b)+x=0$ を満たす x はただ一つしか存在しないから

$$-(a+b)=(-a)+(-b)$$

□

定理 1.1.4

$$-0=0$$

証明

$0+(-0)=0$ (加法の公理（iv）)

$0+0=0$ (加法の公理 (iii))

定理 1.1.1 より, $0+x=0$ を満たす $x\in \mathbb{R}$ はただ一つしか存在しないので

$$-0=0$$

□

公準 5
$\times$ は $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ への写像

定義 1.2.1
$\times$ は $\mathbb{R}$ の乗法という.

定義 1.2.2
$(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ の写像 $\times$ による像 $\times((a,b))$ を $a\times b$ あるいは ab と書き, a と b の積という.
また, $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ から ab を求めることを a に b を掛けるという.

公準 6
1 は $\mathbb{R}$-$\{0\}$ の元である.

公準 7
-1 は $\mathbb{R}-\{0\}$ から $\mathbb{R}-\{0\}$ への写像である.

定義 1.2.3
任意の $a \in \mathbb{R}-\{0\}$ の写像 $^{-1}$ による像 $^{-1}(a)$ を a^{-1} と書き, a の逆数という.

定義 1.2.4
$(a,b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}-\{0\})$ に $ab^{-1} \in \mathbb{R}$ を対応させる.
$\mathbb{R} \times (\mathbb{R}-\{0\})$ から $\mathbb{R}$ への写像を徐法といい, /で表す.
$(a,b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}-\{0\})$ の写像/による像/$((a,b))$ を a/b または $\frac{a}{b}$ と書き, a と b との商という.
また, (a,b) を $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}-\{0\})$ から $\frac{a}{b}$ を求めることを, a を b で割るという.

公理 2（乗法の公理）
写像 $\times$ は次の諸法則を満たす.
(i) いかなる $a,b \in \mathbb{R}$ に対しても　$ab = ba$　(可換法則)
(ii) いかなる $a,b \in \mathbb{R}$ に対しても　$(ab)c = a(bc)$　(結合法則)
(iii) (1 の性質) いかなる $a \in \mathbb{R}$ に対しても　$a1 = a$
(iv)(逆数の性質) いかなる $a \in \mathbb{R}-\{0\}$ に対しても　$aa^{-1} = 1$ すなわち $\frac{a}{a} = 1$

定理 1.2.1
いかなる $a \in \mathbb{R}$, およびいかなる $b \in \mathbb{R}-\{0\}$ に対しても $bx = a$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ がただ一つ存在して, $\frac{a}{b}$ に等しい.

証明
まず $x = \frac{a}{b}$ が $bx = a$ を満たすことを示す.

$$\begin{aligned} b\left(\frac{a}{b}\right) &= b(ab^{-1}) && \text{(乗法の公理（iv)）} \\ &= b(b^{-1}a) && \text{(乗法の公理 (ii))} \\ &= (bb^{-1})a && \text{(乗法の公理 (ii))} \\ &= 1a && \text{(乗法の公理 (iv))} \\ &= a1 && \text{(乗法の公理 (i))} \\ &= a && \text{(乗法の公理 (iii))} \end{aligned}$$

よって, $x = \frac{a}{b}$ は $bx = a$ を満たす.

次に, $bx = a$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ は $\frac{a}{b}$ に一致することをいう.
$bx = a$ であったとして, 両辺に左から b^{-1} をかければ (同様に乗法の定理を用いて)

$$\begin{aligned} b^{-1}(bx) &= b^{-1}a \\ (b^{-1}b)x &= ab^{-1} && \text{(乗法の公理 (ii), (i))} \\ (bb^{-1})x &= \frac{a}{b} && \text{(乗法の公理 (i)(iv))} \\ ax &= \frac{a}{b} && \text{(乗法の公理 (iv))} \\ x1 &= \frac{a}{b} && \text{(乗法の公理 (i))} \\ x &= \frac{a}{b} && \text{(乗法の公理 (iii))} \end{aligned}$$

これで, $bx = a$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ はただ一つ存在して, $\frac{a}{b}$ であることがわかった.

□

定理 1.2.2
いかなる $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ に対しても $(a^{-1})^{-1} = a$

証明
$a \in \mathbb{R} - \{0\}$ とすれば,

$$\begin{aligned} aa^{-1} &= 1 && \text{(乗法の公理 (iii))} \\ a^{-1}a &= 1 \ldots (1) && \text{(乗法の公理 (i))} \end{aligned}$$

他方,$(a^{-1})^{-1}$ は a^{-1} の逆数であるから

$$a^{-1}((a^{-1})^{-1}) = 1 \ldots (2)$$

しかるに, 定理 1.2.1 より, $a^{-1}x = 1$ を満たす
$x \in \mathbb{R}$ はただ一つしかないから (1),(2) より, $(a^{-1})^{-1} = a$

□

定理 1.2.3

$$1^{-1} = 1$$

証明

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1^{-1} &= 1 && \text{(乗法の公理 (iv))} \\ 1 \cdot 1 &= 1 && \text{(乗法の公理 (iii))} \end{aligned}$$

しかるに, 定理 1.2.1 より $1{\cdot}x{=}1$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ はただ一つしかないから, 上の二つの式より

$$1^{-1} = 1$$

□

1.3 加法と乗法の関係に関する公理

公理 3
加法と乗法との間には次のような関係がある
すなわち, いかなる a, b, c に対しても, $a(b+c) = ab + ac$ (分配法則)
乗法の可換法則と分配法則とにより

$$\begin{aligned}(a+b)c &= c(a+b)\\ &= ca + cb\\ &= ac + bc\end{aligned}$$

よって, いかなる a, b, c に対しても, $(a+b)c = ac + bc$
これも分配法則という.

定理 1.3.1
いかなる $a \in \mathbb{R}$ に対しても, $a0 = 0$

証明
分配法則と 0 との性質とにより,

$$\begin{aligned}a0 + a0 &= a(0+0)\\ &= a0\end{aligned}$$

他方, 0 の性質により,

$$a0 + 0 = a0$$

しかるに, 定理 1.1.1 により, $a0 + x = a0$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ はただ 1 つしかないから,

$$a0 = 0$$

□

定理 1.3.2
いかなる $a \in \mathbb{R}$ に対しても, $(-1)a = -a$

証明
$a \in \mathbb{R}$ とする.

$$\begin{aligned} a + (-1)a &= a1 + (-1)a && \text{(1 の性質)} \\ &= 1a + (-1)a && \text{(可換法則)} \\ &= (1 + (-1))a && \text{(分配法則)} \\ &= 0a && \text{(逆数の性質, 反数の法則)} \\ &= a0 && \text{(可換法則)} \\ &= 0 && \text{(定理 1.3.1)} \end{aligned}$$

□

定理 1.3.3
いかなる $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ に対しても $ab \in \mathbb{R} - \{0\}$

証明
背理法を用いる.
$ab \in \mathbb{R} - \{0\}$ とし, $ab = 0$...(1) であったとしてみる.
$a \in \mathbb{R} - \{0\}$ であるから, a^{-1} がある.
そこで, (1) の両辺に左から a^{-1} をかければ,

$$\begin{aligned} a^{-1}(ab) &= a^{-1}0 \\ (a^{-1}a)b &= 0 && \text{(結合法則, 定理 1.3.1)} \\ 1b &= 0 && \text{(反数の性質)} \\ b &= 0 && \text{(1 の性質)} \end{aligned}$$

しかし, これは $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ に反する.
よって, $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ でなければならない.

□

定理 1.3.4
いかなる $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ に対しても, $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

証明

$$
\begin{aligned}
(ab)(ab)^{-1} = 1 = aa^{-1} &\Leftrightarrow a^{-1}(ab)(ab)^{-1} = a^{-1} && (\text{両辺に } a^{-1} \text{をかける}) \\
&\Leftrightarrow (a^{-1}a)b(ab)^{-1} = a^{-1} && (\text{結合法則}) \\
&\Leftrightarrow b(ab)^{-1} = a^{-1} && (\text{可換法則, 逆数の性質}) \\
&\Leftrightarrow b^{-1}b(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} && (\text{両辺に } b^{-1} \text{をかける}) \\
&\Leftrightarrow (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} && (\text{可換法則, 逆数の性質})
\end{aligned}
$$

□

定理 1.3.5
いかなる $a, b \in \mathbb{R}$ に対しても, $a(-b) = -(ab)$

証明
$a, b \in \mathbb{R}$ とすれば,

$$
\begin{aligned}
a(-b) - \{-(ab)\} &= a(-b) + ab && (\text{定理 1.1.2}) \\
&= a\{b + (-b)\} && (a \text{ でくくる}) \\
&= a0 && (\text{反数の性質}) \\
&= 0 && (\text{定理 1.3.1})
\end{aligned}
$$

他方, $ab + (-ab) = 0$...(1)
よって, $ab + x = 0$ であるような $x \in \mathbb{R}$ はただ 1 つしかないから,
(1) より, $a(-b) = -(ab)$

□

1.4 順序の公理

公準 8
$\leqq$ は $\mathbb{R}$ の上の関係である.

公理 4
$\leqq$ は $\mathbb{R}$ の上の全順序関数である. すなわち $\leqq$ は次の法則を満たす.
(i) いかなる $a \in \mathbb{R}$ に対しても, $a \leqq a$ (反射法則)
(ii) いかなる $a, b \in \mathbb{R}$ に対しても, $a \leqq b \wedge b \leqq a \Rightarrow a = b$ (反対称法則)
(iii) いかなる $a, b \in \mathbb{R}$ に対しても, $a \leqq b \wedge b \leqq c \Rightarrow a = c$ (推移法則)
(iv) いかなる $a, b \in \mathbb{R}$ に対しても, $a \leqq b \vee b \leqq a$ (比較可能性の法則)

$^{\forall}$\{ 単元 \} $\in \mathfrak{P}$(数学) に対し \{ 単元 \} = \{ 娯楽 \} だよね !! *math* たのしー !!
＼(^‿^)／（たかゆう）

定義 1.4.1
$a, b \in \mathbb{R}$ に対して, $a \leqq b$ が成り立つならば, a は b 以下である.
$a, b \in \mathbb{R}$ に対して, $a \leqq b$ が成り立つならば, b は a 以上である.

定義 1.4.2
$a, b \in \mathbb{R}$ に対して, $a \leqq b \land a \neq b$ が成り立つとき,
このことを, $a < b$ と書き, a は b よりも小さい, b は a よりも大きいという.

定理 1.4.1
$a, b \in \mathbb{R}$ ならば

$$a \leqq b \Leftrightarrow a = b \lor a < b$$

証明
左から右を示す.
$a \leqq b$ とする.
このとき, $a \neq b$ ならば, 定義により

$$a < b$$

よって, $a = b$ であるか, $a < b$ である.
すなわち, $a = b \lor a < b$
ゆえに,

$$a \leqq b \Rightarrow a = b \lor a < b ...(1)$$

右から左を示す.
$a = b \lor a < b$ とする.
このとき, $a = b$ ならば, 反射法則により, $a \Leftrightarrow b$
また, $a < b$ ならば, 定義により $a \leqq b \land a \neq b$ であるから

$$a \leqq b$$

よって, いずれにしても $a \leqq b$
ゆえに,

$$a = b \lor a < b \Rightarrow a \leqq b ...(2)$$

(1)(2) より,

$$a \leqq b \Leftrightarrow a = b \lor a < b$$

□

定理 1.4.2
$a, b, c \in \mathbb{R}$ ならば, 次の事柄が成り立つ.
(i) $a \leqq b \wedge b < c \Rightarrow a < c$
(ii) $a < b \wedge b \leqq c \Rightarrow a < c$
(iii) $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

定理 1.4.3
いかなる $a, b \in \mathbb{R}$ に対しても

$$a < b,\ a = b,\ a > b$$

のうちのどれか 1 つ, しかもただ 1 つだけが成り立つ.

定理 1.4.3 の証明

公理 4 の (iv) より

$$a \leqq b \vee b \leqq a$$

したがって定理 1.4.1 により,

$$a = b \vee a < b \vee b = a \vee b < a$$
$$\therefore a < b \vee a = b \vee b < a$$

よって,

$$a < b,\ a = b,\ a > b$$

のうちの少なくとも 1 つが成立.

□

1.5 順序関係と加法・乗法との関係に関する公理

公理 5
順序関係 $\leqq$ と加法 $+$ および乗法 $\times$ との間に次の関係がある.
(i) いかなる $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対しても

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c$$

(ii) いかなる $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対しても

$$a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac \ < \ bc$$

定理 1.5.1
いかなる $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対しても

$$a < b \Rightarrow -a > -b$$

証明
$a < b$ とする. 公理 5 の (i) より,

$$a + (-a) < b + (-a)$$
$$\therefore 0 < (-a) + b$$

ここで公理 5 の (i) を用いて

$$0 + (-b) < (-a) + b + (-b)$$
$$\therefore -b < -a$$
$$\therefore -a > -b$$

□

定義 1.5.1
$a > 0$ なる $a \in \mathbb{R}$ は正, $a < 0$ なる $a \in \mathbb{R}$ は負であると言われる.

定義 1.5.2
$a > 0 \wedge b > 0$ または $a < 0 \wedge b < 0$ のとき, a, b は符号が同じである. または同符号であると言われる. $a > 0 \wedge b < 0$ または $a < 0 \wedge b > 0$ のとき, a, b は符号が異なる. または異符号であると言われる.

定理 1.5.2
任意の $a \in \mathbb{R} - 0$ に対して, 次の事柄が成り立つ
(i) $a > 0 \Rightarrow -a < 0$
(ii)$a < 0 \Rightarrow -a > 0$

定理 1.5.3
いかなる $a \in \mathbb{R} - 0$ に対しても, 次の事柄が成り立つ.
(i) $a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow ab > 0$
(ii) $a > 0 \wedge b < 0 \Rightarrow ab < 0$
(iii) $a < 0 \wedge b > 0 \Rightarrow ab < 0$
(iv) $a < 0 \wedge b < 0 \Rightarrow ab > 0$

定理 1.5.3 の証明
(i) $a > 0 \wedge b > 0$ とする. 公理 5 の (ii) により

$$ab > 0b$$
$$ab > 0$$

(ii) $a > 0 \wedge b < 0$ とする, 公理 5 の (ii) により

$$ba < 0a$$
$$ab < 0$$

(iii) $a < 0 \wedge b > 0$ とする. このとき $b > 0 \wedge a < 0$ であるから (ii) より,

$$ba < 0$$
$$ab < 0$$

(iv) $a < 0 \wedge b < 0$ とする. $a < 0$ と定理 1.5.2 の (ii) より

$$-a > 0$$

よって公理 5 の (ii) により

$$b(-a) < 0(-a)$$
$$b(-a) < 0$$

ここで定理 1.3.5 を用いて

$$-ba < 0$$
$$-ab < 0$$

よって

$$ab > 0$$

□

定理 1.5.3 より次の定理 1.5.4 が成り立つ.

定理 1.5.4
いかなる a, b, $c \in \mathbb{R}$ に対しても次の事柄が成り立つ
(i) a, b が同符号　$\Rightarrow ab > 0$
(ii) a, b が異符号　$\Rightarrow ab < 0$

問 1
いかなる a, $b \in \mathbb{R}$ に対しても次の事柄が成り立つことを証明せよ.
$ab > 0 \Rightarrow a$, b が同符号, $ab < 0 \Rightarrow a$, b が異符号

問 1 の解答例

a, $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ としたとき,

$$ab < 0,\ ab < 0$$

は, あらゆる場合をつくしており, かつ, $a,\ b$ が同符号であることと, $a,\ b$ が異符号であることは同時には成り立たない.
よって, 定理 1.5.4 より, 転換法を用いて
$ab > 0 \Rightarrow a, b$ が同符号, $ab < 0 \Rightarrow a,\ b$ が異符号は成り立つ.

□

定理 1.5.5
いかなる $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対しても

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

証明
背理法を用いる. $ab = 0$ とし, $a \neq 0 \wedge b \neq 0$ とする. このとき, a, b は同符号もしくは異符号である. また定理 1.5.4 により, a, b が同符号であれば

$$ab > 0$$

また, a, b が異符号であれば

$$ab < 0$$

よっていずれにしても $ab \neq 0$ となり, $ab = 0$ に矛盾する. ゆえに $ab = 0$ ならば
$a = 0 \vee b = 0$ でなくてはならない.

□

定理 1.5.6
任意の $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ に対して

$$aa > 0$$

証明
$a \in \mathbb{R} - \{0\}$ とすれば, a と a は同符号であるから, 定理 1.5.4 により

$$aa > 0$$

でなければならない.

□

定理 1.5.7

$$1 > 0$$

証明
$1 \in \mathbb{R} - \{0\}$ であるから, 定理 1.5.6 により,

$$1 \cdot 1 > 0$$
$$1 > 0$$

□

定理 1.5.8
$a > 0 \wedge b > 0$ であるような任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$a < b \Leftrightarrow aa < bb$$

が成り立つ.

証明
$a < b \Rightarrow aa < bb$ の証明
$a < b$ とする. そうすれば公理 5 の (ii) により

$$aa < ba,\ ab < bb$$

よって定理 1.4.2 の (iii) により

$$aa < bb$$

$aa < bb \Rightarrow a < b$ の証明
$aa < bb$ とする. $a < b$ であることを背理法で示す. $a \geqq b$ とする. 上の証明から

$$aa \geqq bb$$

しかし, これは $aa < bb$ に矛盾する. よって

$$a < b$$

でなければならない.

□

問 2
$a \geqq 0 \wedge b \geqq 0$ であるような任意の $a,\ b \in \mathbb{R}$ に対して

$$a \leqq b \ \Leftrightarrow\ aa \leqq bb$$

であることを証明せよ.

問 2 の解答例
$a \leqq b \ \Rightarrow\ aa \leqq bb$ の証明
$a < b$ とする. すると公理 5 の (ii) により

$$aa \ \leqq\ ba,\ ab \ \leqq\ bb$$

よって定理 1.4.2 の (iii) により

$$aa \leqq bb$$

$aa \leqq bb \Rightarrow a \geqq b$ の証明
$aa \leqq bb$ とする. $a \leqq b$ であることを背理法で示す. $a > b$ とする. 上の証明から

$$aa > bb$$

しかし, これは $aa \leqq bb$ と矛盾する. よって

$$a \leqq b$$

でなければならない.

□

1.6 除法の公理

公準 7
$^{-1}$ は $\mathbb{R} - \{0\}$ から $\mathbb{R} - \{0\}$ への写像

公理 2 (除法の公理)
いかなる $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ に対しても
$aa^{-1} = 1$, すなわち $\frac{a}{a} = 1$ (逆数の性質)

定理 1.6.1
任意の $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ に対し
(i)$a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$
(ii)$a < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0$

証明
(i)
$a > 0$ とする. $\frac{1}{a} > 0$ であることを背理法によって示そう.
かりに $\frac{1}{a} < 0$ であったとする.
すると, 公理 5 の (ii) と除法の公理により,

$$\frac{1}{a}a < 0a$$
$$a^{-1}a < 0$$
$$1 < 0$$

しかし, これは定理 1.5.7 に矛盾する.
よって, $\frac{1}{a} > 0$

(ii)
$a<0$ とする. $\frac{1}{a}<0$ であることを背理法によって示そう.
仮に $\frac{1}{a}>0$ であったとする.
すると, 公理 5 の (ii) と除法の公理により,

$$a\frac{1}{a}<0\frac{1}{a}$$
$$aa^{-1}<0$$
$$1<0$$

しかし, これは定理 1.5.7 に矛盾する.
よって, $\frac{1}{a}<0$

□

定理 1.6.2
$a>0$, $b>0$ であるような任意の $a,b\in\mathbb{R}$ に対して,

$$a<b\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$$

が成り立つ.

証明
$a<b$ とする. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ であることを背理法で示す.
仮に $\frac{1}{a}\leq\frac{1}{b}$ であったとしてみる.
a,b は同符号であるから、定理 1.5.4 により $ab>0$
よって, 公理 5 の (ii) と除法の公理により

$$\frac{1}{a}ab\leq\frac{1}{b}ab$$
$$a^{-1}ab\leq b^{-1}ab$$
$$b\leq a$$

しかし, これは $a<b$ であることに矛盾する. よって, $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$
でなければならない.

□

定理 1.6.3
任意の $a,b\in\mathbb{R}$ に対して

$$a<b\Rightarrow a<\frac{a+b}{1+1}<b$$

が成り立つ.

1.7 絶対値

定義 1.7.1
任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し, $|a| = \max\{a\ ,\ -a\}$ と置き, $|a|$ を a の 絶対値 という.
$\mathbb{R}$ の各元 a に $\mathbb{R}$ の元 $|a|$ を対応させる規則は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像である.

定理 1.7.1
任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し, 次の事柄が成り立つ.
(i) $|a| = a \vee |a| = -a$
(ii) $|a| \geqq a \wedge |a| \geqq -a$
(iii) $|a| = |-a|$

証明
(i) $a > 0$ ならば, $-a < 0$
よって, $|a| = \max\{a\ ,\ -a\} = a$
$a = 0$ ならば, $-a = 0$
よって, $|a| = \max\{0\ ,\ 0\} = 0 = a = -a$

□

(ii) $\max\{a\ ,\ -a\} \geqq a$. よって, $|a| \geqq a$
同様に, $\max\{a\ ,\ -a\} \geqq -a$
よって, $|a| \geqq -a$
ゆえに, $|a| \geqq a \wedge |a| \geqq -a$

□

(iii) $|a| = \max\{a\ ,\ -a\} = \max\{-a\ ,\ -(-a)\} = a$

□

問 3
任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し

$$|a|\ |a| = aa$$

であることを証明せよ.

問 3 の解答例
$a \in \mathbb{R}$ に対して, 場合分けして考える.
(i) $a \geqq 0$ であるとき, $|a| = a$
ゆえに,

$$|a||a| = aa$$

(ii)$a<0$ のとき, $|a|=-a$
ゆえに,

$$|a||a|=(-a)(-a)=aa$$

よって成立.

□

定理 1.7.2
$^{\forall}a\in\mathbb{R}$ に対して, 以下が成り立つ.

(i) $|a|\geqq 0$

(ii) $|a|=0 \iff a=0$

(iii) $a\geqq 0 \iff |a|=a$

(iv) $a\leqq 0 \iff |a|=-a$

証明
まず (i) を示す.
絶対値の定義を確認すると, $|a|=\max\{a,-a\}$ だったので,
定理 1.3.4 より, (1) $a>0$ (2) $a=0$ (3) $a<0$ の 3 パターンで場合分けをする.

(1) $a>0$ のとき, $-a<0$ より, すぐに $a>-a$ がわかるので,

$$|a|=\max\{a,-a\}=a>0$$

(2) $a=0$ のとき, 定理 1.1.4 より,

$$-a=-0=0=a$$

$$\therefore\ |a|=0$$

(3) $a<0$ のとき, (1) と同様にすると $-a>0$ なので,

$$|a|=-a>0$$

以上 (1)〜(3) より,

$$|a|\geqq 0$$

次に, (ii) を示す
($\Rightarrow$) $|a|=0$ とすると, $a=0\vee -a=0$ であるがどちらの場合であっても,

$$a=-a=0$$

($\Leftarrow$) (i) の証明 (2) より従う.

続いて, (iii) を示す.

$$a \geqq 0 \iff a \geqq 0 \geqq -a \iff |a| = \max\{a, -a\} = a$$

同様に (iv) を示す.

$$a \leqq 0 \iff a \leqq 0 \leqq -a \iff |a| = \max\{a, -a\} = -a$$

□

定理 1.7.3
任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対し, $|ab| = |a||b|$ が成り立つ.

証明
a, b が, (1) どちらも正 (2) 異符号 (3) どちらも負 で場合分けする.
(a, b どちらかが 0 の場合は $|ab| = 0 = |a||b|$)

(1) $a > 0 \wedge b > 0$ のとき, $ab > 0$ であるから, 定理 1(iii) から,

$$|ab| = ab, |a| = a, |b| = b$$

より成り立つ.

(2) $a > 0 \wedge b < 0$ のとき, ($a < 0 \wedge b > 0$ も同様なのでこちらは省略する.)
$ab < 0$ であるから, $-ab > 0, |ab| = -ab, |a| = a, |b| = -b$ $(-b > 0)$ より,

$$|a||b| = a(-b) = -ab = |ab|$$

(3) $a < 0 \wedge b < 0$ のとき, $ab > 0$ であるから, $|ab| = ab, |a| = -a, |b| = -b$ より,

$$|a||b| = (-a)(-b) = ab = |ab|$$

□

定理 1.7.4
任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対し, 次が成り立つ.

(i) $|a + b| \leqq |a| + |b|$

(ii) $|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow [a, b$ が同符号$] \vee a = 0 \vee b = 0$

証明　(i) から示す.
問 2 より, $|a+b||a+b|$ と $(|a|+|b|)(|a|+|b|)$ とを比較することで定理を示す.

$$\begin{aligned} |a+b||a+b| &= |(a+b)(a+b)| && \text{(定理 1.7.3 より)} \\ &= (a+b)(a+b) && \text{(問 3 より)} \\ &= aa+ab+ab+bb && \text{(分配法則, 交換法則)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (|a|+|b|)(|a|+|b|) &= |a||a|+|a||b|+|b||a|+|bb| && \text{(分配法則, 交換法則)} \\ &= aa+|ab|+|ab|+bb && \text{(問 3, 定理 1.7.3 より)} \end{aligned}$$

ここで定理 1.7.1 より,

$$ab \leqq |ab|$$

以上から,

$$\begin{aligned} |a+b||a+b| &\leqq (|a|+|b|)(|a|+|b|) \\ |a+b| &\leqq |a|+|b| \end{aligned}$$

続いて (ii) を示す.
(i) の証明から, 等号成立の必要十分条件は,

$$ab = |ab|$$

が成り立つことなので, 定理 1.7.2(iii), (iv) より,

$$ab = |ab| \iff ab \geqq 0 \iff ab > 0 \vee a = 0 \vee b = 0$$

さらに, 定理 1.5.4 (i) 及び, 問 1 より,

$$ab > 0 \iff a, b \text{ が同符号}$$

よって, (ii) が成り立つための必要十分条件は,

$$[a, b \text{ が同符号}] \vee a = 0 \vee b = 0$$

□

参考文献

赤　攝也 『実数論講義』 (日本評論社)

---

int $i = 1$　　{
while$(i < 0)$　　$i++;$
　　}　　って怖くね.（オッカー）

ベクトル空間

1 年　小林 紀貴　渡邉 陽登
米倉 来誠　大辻 泰聖

数学好きにはいささか簡単に思うかもしれない. もし, そうであるならば, 自ら探求し理解を深めて欲しいと思う. その探求が自らを高めるだけでなく楽しさの原点であるのだから... 逆に数学を不得手とする諸君は読みたくないという気持ちをグッとこらえこのページからはじめて n ページ (n はあなたの好きな自然数. ただし, ここでは自然数に 0 は含まないものとする.) まで読んでほしい. そうすれば, 数学好きが数学にハマる理由と少しの変態性を垣間見ることができるかもしれない.[1]
そして私は, あなたが少しでも数学って楽しいのでは??と思って数学科に来てくれることを期待したいと思う.

余談はここまでにして, 早速と言いたいところなのだが, まず軽い導入といこう.
あなたはベクトルと聞いてなにを思い出すだろうか??... 吐き気がする??試験で点数がとりやすい?? 多種多様な言葉が聞こえてきたわけであるが, 少し質問を変えよう. 高校数学でいうベクトルの分野に関係する言葉をあなたはどれだけ知っていますか?... まったく知らない??だって俺, 高校生だもん??
では, 一次独立なんてのはどうだろう??... いや, そんなどうでもいいような言葉なら知ってる www だと, 意外とどうでもよさそうなものが大事だったりするんだよ??
例えば[2], 英作文中の定冠詞よく忘れがちだけど大事. 国語なら象徴表現.

ところで, 一次独立がどのように必要なのか, 少し考えてほしい. 高校ではどのように使っただろうか?... なんか先生が答案の最後の方に書いとけって言ってた??じゃあそれは, おいておくとして, 一次独立ってなんぞや??
一次独立..... ベクトルが一次的に独立している?? いや, それ何の説明にもなってないやん!![3]

次のページから少しずつまじめな話になっていくのであしからず.

[1] 垣間見るをなぜ使ったのか疑問に思った読者へ
数学科 1 年次が使用する参考書『無限をかいまみる』をネタとして使用しただけのこと.
中央大学数学科にはぜひ気付いて欲しいものです.

[2] 例えばと聞くと Aimer のカタオモイが流れませんか??

[3] これはあくまでネタであり本当にこんなことを諸君が考えていると思っているわけではないことに注意していただきたい.

まず, 数の集合で, 四則がその集合内で行えるものを体という. 有理数全体の成す体を有理数体 $\mathbb{Q}$, 実数全体の成す体を実数体 $\mathbb{R}$, 複素数全体の成す体を複素数体 $\mathbb{C}$ というが, 整数体というものは存在しない. なぜなら整数を整数で割ったものが整数であるとは限らないからである.

一次独立の説明に使う言葉の説明を先にする.

rank(行列の階数) とは, 行列の簡約化時の主成分の個数のことである. 例えば,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であれば, rank$A = 3$ である.

ここで, rank に関する *Theorem*[4] を 1 つ紹介する.

Thm

$$\begin{aligned} \text{rank}A &= A \text{ の列ベクトルの一次独立な最大個数} && (1) \\ &= A \text{ の行ベクトルの一次独立な最大個数} && (2) \end{aligned}$$

[*proof* (1)]

$$u_1, \ldots, u_m \text{の一次独立な最大個数} = r$$

であるための必要十分条件が, 以下のとおりであることにより示されている.

$$u_1, \ldots, u_m \text{の中に } r \text{ 個の一次独立なベクトルがあり,}$$

$$\text{他の } m - r \text{ 個のベクトルはこの } r \text{ 個のベクトルの一次結合で書ける.}$$

[*proof* (2)]

B を A の簡約化とし, A, B の行ベクトルの一次独立な最大個数をそれぞれ r, s とする.B の行ベクトルは, A の行ベクトルの一次結合で書けることから, $s \leq r$

逆に A は B を基本変形を繰り返して得られるものだから, $r \leq s$

以上より $r = s$ となり, B の零ベクトルでない行ベクトルは, 一次独立である. (*Q.E.D.*)

[4] 以降では *Def, Thm* を使うがこれらは, 定義と定理を意味する.

(1) 喧嘩はだめよ!!一次独立

Def

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \overrightarrow{v}_i = \overrightarrow{0} \text{を満たす実数 } c_1, c_2, \ldots, c_k \text{の組が}$$

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0 \text{ のみである.}$$

このとき, $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$は一次独立であるという.

以下では一旦, 簡単のため $k = 2$ として考えてみようと思う. つまり, 二つの平面ベクトル A, B について一次独立を考える.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

というように定める.[5]このとき, 一次独立かを判定するためには,
2 つの実数 c_1, c_2 において,

$$\begin{cases} c_1 a_1 + c_2 b_1 = 0 \\ c_1 a_2 + c_2 b_2 = 0 \end{cases} \quad \text{これは, } \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \end{bmatrix} \text{の簡約化と同一視できる.}$$

この連立方程式を解く.
その解が, $c_1 = c_2 = 0$ のみであるとき,A, B は一次独立である.
例えば, $a_1 = b_2 = 1, a_2 = b_1 = 0$ と定めると, 以下のとおり.

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

このとき, 先に考えた連立方程式は, 以下のとおり.

$$\begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0 \\ c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

これは, $c_1 = c_2 = 0$ のみで成立. ゆえにここでの A, B は一次独立である.
また, $a_1 = 1, a_2 = -2, b_1 = -2, b_2 = 4$ と定めると, 以下のとおり.

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

[5]苦手な人がもしもこのページまで読んでくれたときのために.
この資料においてベクトルの成分を縦に書くことを許してほしい. また, ここにおいては, 上の成分を x 軸下の成分を y 軸と考えてくれて問題はない.

このとき, 先に考えた連立方程式は, 以下のとおり.

$$\begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot (-2) = 0 \\ c_1 \cdot (-2) + c_2 \cdot 4 = 0 \end{cases}$$

これは, $c_1 = 2l, c_2 = l$ (l は任意の実数) で成立. ゆえにここでの A, B は一次従属[6]である. ここまで, k=2 としてきたが $k = n$ (n は 3 以上の自然数) の時を考えてみよう. 二つのベクトル A, B について考える.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

というように定める. 先の k=2 の時と同じように考えれば,

$$\begin{cases} c_1 a_1 + c_2 b_1 = 0 \\ c_1 a_2 + c_2 b_2 = 0 \\ \vdots \\ c_1 a_n + c_2 b_n = 0 \end{cases} \quad \text{や} \quad \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & 0 \end{bmatrix} \text{の簡約化を考える.}[7]$$

それでは, m 個のベクトル $A_1, A_2, \cdots, A_m$ について考える.

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \cdots, A_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$$

というように定める. 同様に考えれば,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & 0 \end{bmatrix} \text{の簡約化を考えればよい.}$$

[6] 一次従属を疑問に思った読者へ
2 つ以上のベクトルにおいて, その中のベクトル 1 つがその他のベクトルを用いて表現できることのことと考えてくれてよい.

[7] ちなみにこのときは,$A = B$ のときのみ一次従属である.

少し考えれば m 個のベクトル $A_1, A_2, \cdots, A_m$ が一次独立であるとき,
$\mathrm{rank}A = m$ となることがわかるであろう.

次のページからは, ベクトルによって生成される空間について, 考えていこうと思う. 例を挙げれば, x 軸と y 軸を持ってくれば, xy 平面が作られるといった具合の話である.

(2) 空間を生成??魔法ですか??

K ベクトル空間 V の空ではない部分集合 S に対し, S の元の一次結合の全体

$$\{c_1B_1 + c_2B_2 + \cdots + c_mB_m \mid c_i \in K, B_i \in S\ (i = 1, 2, \ldots, m)\}$$

は V の部分空間である. これを, S から生成される部分空間という.

ここで, ベクトル空間 V の部分集合 W が部分空間であるための必要十分条件は以下.

(1) $\vec{0} \in W$ (2) $a, b \in W$ ならば, $a+b \in W$ (3) $a \in W$, $k \in \mathbb{R}$ ならば, $ka \in W$

例えば,

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix} \text{ を考え, } A_k \text{を } e_k \text{とする. } (1 \leq k \leq 6)$$

このとき, 以下のように考え,

$$b_1 = \mathrm{HP}, b_2 = \text{攻撃}, b_3 = \text{防御}, b_4 = \text{特攻}, b_5 = \text{特防}, b_6 = \text{素早さ}$$

以下のように定めると,

$$c_1 = 106, c_2 = 110, c_3 = 90, c_4 = 154, c_5 = 90, c_6 = 130$$

ミュウツーのステータスが出来上がるように, 6 個のたがいに関与しない軸を持った空間において, すべてのポケモンのステータスを表すことができることがわかるのではないだろうか.
ここで, さらにたまごを $\vec{0}$ とし, $^{\forall}$(ポケモン) に対して $-$(ポケモン) を定義する.
このようにすれば, ポケモン部分空間の出来上がりである.

[8]

このようなことから, 少し考えれば, 部分空間を生成とは, 以下の行列

$B_{n\times m} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_m \end{bmatrix}$ が, rank$B_{n\times m} = n$ を満たせばよい.

ここからは, 基底つまり, 一次独立かつ生成を満たすベクトルの集まりについて考えていこうと思う.

(3) 一次独立と生成の能力をあわせもつ基底!!

ここまでの話からわかることは, rank$= m = n$ つまり, 基底であるベクトルの集まりにおける行列は少なくとも正方行列になっていることである.

それでは, さらに話を詰めていこうと思う.

基底になっているベクトルはどのようなものであるのか??少し考えてみてほしい. n 次元の空間において,$[e_1, e_2, \ldots, e_n]$ は基底になっていることは, すぐにわかると思う. したがって, 簡約化をすることで, E_n となる n 個のベクトルの集まりは, n 次元の空間の基底になっているわけである.

また, ベクトル空間を定義するのに必要な基底ベクトルの数のことを次元という.[9] これを $\dim A = k(k$ は A の次元) と書くこともある.

前ページにおいて考えたポケモン部分空間において考えれば,HP, 攻撃, 防御, 特攻, 特防, 素早さの 6 つの基底となるベクトル (軸) が必要であることがわかると思う
したがって, ポケモン部分空間の次元は 6 である. つまり $\dim$(ポケモン部分空間$) = 6$
ここで, 基底に関する *Thm* を 1 つ紹介する.

ベクトル空間 V の基底に含まれるベクトルの個数は, 基底の取り方に依らずに一定.

[*proof*]

まず, $u_1,\ \ldots,\ u_n$ が基底であるとは, $u_1,\ \ldots,\ u_n$ は一次独立であり, V を生成することである. 定理の証明に入る.

$u_1,\ \ldots,\ u_m$ と $v_1,\ \ldots,\ v_n$ が V の基底であるとすると, $v_1,\ \ldots,\ v_n$ は $u_1,\ \ldots,\ u_m$ の一次結合で書ける. ここで, $n\ >\ m$ を仮定すれば, $v_1,\ \ldots,\ v_n$ は一次従属. 故に基底であることに矛盾するので, $n \leq m$ となる. 同様に, $u_1,\ \ldots,\ u_m$ と $v_1,\ \ldots,\ v_n$ を取り替えて $m \leq n$

以上より $m\ =\ n$ となり, 基底に含まれるベクトルの個数が一定である. (*Q.E.D.*)

[8]実はこれまでの例には致命的欠陥があるわけである. もしも定義をしっかりと理解したうえで疑問に思った読者がいたとすれば, きっとそれは正しい. 間違いの訂正は読者に任せる. もしその欠陥に気づいていない場合には, 読み飛ばしてしまって構わない. きっとその人は部分空間ができたように見えているはずなのでこの例である程度は理解できているはずであるから...

[9]つまるところ, 今定義したベクトル空間の任意の (どのような) ベクトルをも表現するのに必要な軸の数である.

(4) 君は同じに見えるかな??

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \qquad \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

一先ず, 二つ並べたわけなのだが, これを同じものとして考えていこうと思う.
つまり, $n+1$ 個の軸を $1, x, x^2, \ldots, x^n$ として考えているということである.

ここからは, ある写像 f について成立する性質について見ていきたいと思う.
ここまで読んでくれた君たちならわかってくれると思うが, 主は例においてネタに走る傾向がある. すでに理解している人にとっては果てしなく読みにくいものとなっているというのは承知の上であるが, このまま突き進むことを許してほしい. 苦手な人への配慮のつもりで面白そうなネタを考えているのである.(この例が, 苦手な人に読みやすく理解できるものであるかは置いておくとしよう...)

(5) イメージしやすい Im とケンタッキーな Ker

このページにおいて, 考えていくことをざっくりと書くと,
Im は写像 f によって描かれる図形がどのようなものであるか,
Ker は写像 f によって零元に移される元の集まりである.

Thm

V, W をベクトル空間とし, $f : V \to W$ を線形写像とする.

$(\mathscr{A})\ \mathrm{Im}f = \{f(a) \mid a \in V\}$ $(\mathscr{B})\ \mathrm{Ker}f = \{a \in V \mid f(a) = 0_W\}$ という具合である.

楽しい具体例 *Time*

($\mathscr{A}$) Im について.
V を塗り絵の各パーツであるとし, W を完成した絵とする.
このとき, 写像 f を色鉛筆をもった子どもとすれば, $f : V \to W$ とできる.
ここにおいて, Imf は, その子どもが完成させた絵である. 太陽が青かったり, 空が紫だったりする才能を爆発させた絵が出来上がったりするのである.

($\mathscr{B}$) Ker について.
V を弓道の矢が無数にある集合であるとし,W を的とする. ただし, 的の中心を零元と定義する. このとき, 写像 f を矢を射る行為とすれば, $f : V \to W$ とできる.
ここにおいて, Ker$f$ は, 的の中心に射られたすべての矢を集めた集合である.

(6) Im , Ker において成立する定理類

一つ注意をしておく. 数学を学ぶ上である程度の暗記が必要であることに関しては認めざる負えないが, 定理類をすべて暗記しようとしている諸君がもしいるのなら, その勉強法は間違っている. ただし, 一度見ただけで覚えることができたり, 使いすぎて覚えているのだが www という諸君は何の問題はないので安心してほしい.
注意書きはここまでにして, 本題である定理類を並べていこう.

V を n 次元の線形空間, W を m 次元の線形空間とし, $f : V \to W$ を線形写像とする.

rank-nullity theorem

$$\dim \mathrm{Im}f \ + \ \dim \mathrm{Ker}f \ = \mathrm{n} \ = \ \dim V$$

Thm

$$f \text{ が単射} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}f \ = \ 0_V$$
$$f \text{ が全射} \Leftrightarrow \mathrm{Im}f \ = \ W$$

(7) *P.S*

ここまで読んでくれた方へ, 参考文献を使わないせいで大変読みにくいものとなってしまったわけであるが読んでいただきありがとう.

数学が不得手ながらも読み切った方がいる可能性を信じ, かなり簡単にまたなるべくわかりやすく書いたつもりではあるので, もしも少しでもおもしろそうだと思った場合には, 数学と深く触れ合う機会なのでぜひともももっと詳しく丁寧に書かれた本に触れてほしいと思う. それが数学にはまる好機となるであろうから. 数学にはまることに関して言えば年齢など関係ないと個人的には思う. 紙と筆記用具と根性でどうにかなる世界であるのだから. (ただし例外はある.)

数学好きへ, 諸君にとってはいささか簡単なものになってしまったことを謝っておく. ただ諸君のためにいくつかの定理を証明を残す形で書いているわけだから挑戦してみるといい. 基本的に証明に使う知識はここで完結しているはずである.

これから入試を迎える人たちへ

こと数学についてのみ語ることを許してほしい. まずはじめに, 大学入試数学が好きだから数学科に行こうと考えている人については数学科に行くかどうかについて改めて考えることをおすすめする. 大学での数学はまったくの別物であるから. 数学が好きでもなかったり大学入試までの数学ができるからといってきた人は, 総じて数学科にきて後悔することが多いのである. 1 つ注意しておくが, 私は大学入試数学を解くことについては好きだし人並みにはできると思う. ただ, 数学科に行くことに決めた要因はそれとは違う (長くなるので割愛).

では, 入試対策の話に移ろう. 是非, 多種多様な問題に巡り合う機会を持てるのが理想[10]ではあるが, きっとそんなことをできるのはごく少数であるからもっと一般に通用する話をしよう. 1 学校の授業にちゃんと出席する. 下手な話 授業内容の関連項目しか入試には出ないわけであるから, 授業に出ないのはもったいない. 大学でも授業に来ない人は多くいるわけだが愚行であることはいうまでもない. 自由に生活ができるわけであるからその行動に疑問はないが. 2 少なくとも 3 つの大学それぞれ 3 カ年分くらいの過去問はやろう. 大学入試数学に関しては, 見たことある問題を増やすのが大事であるから, やっておいて損はない.

それでは最後に,「志有る者, 事竟に成る」という言葉を贈るとともに諸君の努力が結果に結びつくことを祈ります. 諦めず, がんばれ!!

Thank you for reading.

[10]私が受験期にやっていたのは旧帝大 15 カ年制覇+生まれた年の問題の旧帝大, 私大の制覇である.

Column Part1 【色々ランキング】

数学科の主

1位…とわ	9票
2位…あさが	6票
3位…はぎわら	5票

推しメン

1位…TKHS君	10票
1位…はぎわら	10票
3位…あゆみ	7票

数研のアイドル

1位…こみけん	12票
2位…はぎわら	6票
3位…あさが	3票

愛してやまない人

1位…はぎわら	12票
2位…おたじい	11票
3位…ぴろたん	4票

好きな分野

1位…統計 12票
2位…解析 10票
3位…幾何 6票

好きなコンビニ

1位…セブンイレブン 18票
2位…ファミリーマート 10票
3位…ローソン 6票

1票だけの人 (コンビニ) がかなり多かったです.(機関誌担当)

線形代数班

2 年生　尾熊 涼
1 年生　川村 耕大
荒井 貫汰
庄司 拓真
宮川 直大

ゼミ班紹介

かわこう　じゃんけんで班長や他の役職をすべて勝ち取った最強の男.

あらかん　じゃんけんではいつもかわこうと一騎打ち. 毎回パーを出して負ける.

しょうじ　応用科学科からの刺客. じゃんけんはあまり強くない. 字がきれい (重要)

みやかわ　shadowverse に脳を侵食されている. じゃんけんは弱い.

おぐまさん　頼れるゼミ監督. でも 5 限に寝坊してくる. もちろん 1 限は...(笑)

そんなかんじでかわこうを弄りながら楽しくやってます.

見たことありそうでないものシリーズ⑩ハム太郎オフで 5 番以降も元気に合いの手を打つ人
(↑ $m\phi cchan$)

行列式とその演算

定義

行列 $A = [a]$ に対して $|A| = a$ とする.
$n-1$ 次正方行列に対して行列式が定義できたと仮定するとき,
n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ の $|A|$ を

$$|A| = (-1)^{1+1}a_{11}|A_{11}| + (-1)^{2+1}a_{21}|A_{21}| + \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}|A_{n1}| \tag{1}$$

で定義する. ここで A_{ij} は A の第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $n-1$ 次正方行列である.

定義

A を $m \times n$ 行列とする. A の第 1 行から第 m 行の行ベクトルを

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_1 &= (a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1n}) \\
\boldsymbol{a}_2 &= (a_{21}\ a_{22}\ \cdots\ a_{2n}) \\
&\vdots \\
\boldsymbol{a}_n &= (a_{n1}\ a_{n2}\ \cdots\ a_{nn})
\end{aligned}$$

とするとき, A の分割

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

を A の行ベクトル分割という.

定理

行列式 $|A|$ は次のような性質を満たす.

(D1) ある i について $\boldsymbol{a_i} = \boldsymbol{b_i} + \boldsymbol{c_i}$ ならば

$$|A| = \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{b_i} + \boldsymbol{c_i} \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{b_i} \\ \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{c_i} \\ \vdots \end{vmatrix}$$

(D2) ある i について $\boldsymbol{a_i} = c\boldsymbol{b_i}$ ならば

$$|A| = \begin{vmatrix} \vdots \\ c\boldsymbol{b_i} \\ \vdots \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{b_i} \\ \vdots \end{vmatrix}$$

(D3) 2 つの等しい行がある $(a_i = a_j)$ ならば

$$|A| = \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a_i} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_j} \\ \vdots \end{vmatrix} = 0$$

(D4) 単位行列の行列式は 1.

$$|E| = 1$$

(D1) と (D2) の性質をあわせて **多重線形性** とよぶ. また (D3) の性質を**交代性**とよぶ.

[証明]

まず $n = 1$ のとき $|A| = a$ がこれらの性質を満たすのは明らかである.

$n > 1$ として $n - 1$ 次までの行列式がこれらの性質を満たすとして仮定して, 10.1 で定義された n 次正方行列 A の行列式が (D1) から (D4) までの性質を持つことを証明する.

$|A|$ の定義式 (10.1) の第 k 項は,

$$(-1)^{k+1}a_{k1}|A_{k1}| = (-1)^{k+1}a_{k1}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(ただし網掛け部分を除く)

である. $\boldsymbol{a'_i} = [a_{i2} \dots a_{in}]$ とおく. このとき A_{k1} の行ベクトル分割は $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a'_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a'_n} \end{bmatrix}$ である.

ただし $\boldsymbol{a'_k}$ は現れない.

(D1) $\boldsymbol{a_i} = \boldsymbol{b_i} + \boldsymbol{c_i}$ となっているとする. これに対応して $\boldsymbol{a'_i} = \boldsymbol{b'_i} + \boldsymbol{c'_i}$ と書く.A の第 i 行を $\boldsymbol{b_i}$ で置き換えた行列を B とし同時に $\boldsymbol{c_i}$ に置き換えた行列を C とすると

$$|A| = |B| + |C|$$

が (D1) で示すべきことである. $k \neq i$ なら $a_{k1} \neq a_{i1}$ で帰納法の仮定より

$$|A_{k1}| = \begin{vmatrix} \vdots \\ \cancel{\boldsymbol{a'_k}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b'_i} + \boldsymbol{c'_i} \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ \cancel{\boldsymbol{a'_k}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b'_i} \\ \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots \\ \cancel{\boldsymbol{a'_k}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{c'_i} \\ \vdots \end{vmatrix} = |B_{i1}| + |C_{i1}|$$

したがって $(-1)^{k+1}a_{k1}|A_{k1}| = (-1)^{k+1}a_{k1}(|B_{k1}| + |C_{k1}|)$

一方 $k = i$ ならば $a_{k1} = a_{i1} = b_{i1} + c_{i1}$ で

$$|A_{k1}| = |A_{i1}| = \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a'_i} \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{b'_i} + \boldsymbol{c'_i} \\ \vdots \end{vmatrix} = |B_{i1}| + |C_{i1}|$$

だから $(-1)^{k+1}a_{k1}|A_{k1}| = (-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}| = (-1)^{i+1}(b_{i1} + c_{i1})|A_{i1}|$

以上をまとめると

$$|A| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}|A_{k1}| = \sum_{k=1 k\neq i}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}(|B_{k1}| + |C_{k1}|) + (-1)^{i+1}(b_{i1} + c_{i1})|A_{i1}|$$

$$=\Big(\sum_{k=1k\neq i}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}|B_{k1}|+(-1)^{i+1}b_{i1}|B_{i1}|\Big)+\Big(\sum_{k=1k\neq i}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}|C_{k1}|+(-1)^{i+1}c_{i1}|C_{i1}|\Big)$$

右辺の前半は B の行列式であり後半は C の行列式より

$$|A|=|B|+|C|$$

(D2)

$\boldsymbol{a_i}=c\boldsymbol{b_i}$とする.これに対応して,$\boldsymbol{a\acute{}_i}=c\boldsymbol{b\acute{}_i}$と書く.$\boldsymbol{A}$ の第 i 行を,$\boldsymbol{b_i}$で置き換えた行列を $\boldsymbol{B}$ とする.

$$|\boldsymbol{A}|=c|\boldsymbol{B}|$$

を示そう.

$k\neq i$ なら, 帰納法の仮定から

$$(-1)^{k+1}a_{k1}|\boldsymbol{A_{k1}}|=(-1)^{k+1}a_{k1}\begin{vmatrix}\vdots\\ \boldsymbol{a\acute{}_k}\\ \vdots\\ c\boldsymbol{b\acute{}_i}\\ \vdots\end{vmatrix}=c(-1)^{k+1}a_{k1}\begin{vmatrix}\vdots\\ \cancel{\boldsymbol{a\acute{}_k}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{b\acute{}_i}\\ \vdots\end{vmatrix}=c(-1)^{k+1}a_{k1}|\boldsymbol{B_{k1}}|$$

一方, $k=i$ なら, $a_{i1}=cb_{i1}$ で

$$(-1)^{i+1}a_{i1}|\boldsymbol{A_{i1}}|=c(-1)^{i+1}b_{i1}\begin{vmatrix}\vdots\\ \cancel{c\boldsymbol{b\acute{}_i}}\\ \vdots\end{vmatrix}=c(-1)^{i+1}b_{i1}|\boldsymbol{B_{i1}}$$

これらを合わせて,

$$|A|=c\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}b_{k1}|\boldsymbol{B_{k1}}|=c|\boldsymbol{B}|.$$

(D3)

A の行ベクトル分割において,$\boldsymbol{a_i}=\boldsymbol{a_j}(i<j)$ とする.このとき$\boldsymbol{a\acute{}_i}=\boldsymbol{a\acute{}_j}, k\neq i$ かつ $k\neq j$ のとき,

$$|A_{k1}|=\begin{vmatrix}\vdots\\ \boldsymbol{a\acute{}_i}\\ \vdots\\ \cancel{\boldsymbol{a\acute{}_k}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{a\acute{}_i}\\ \vdots\end{vmatrix}$$

には成分の同じ行が 2 つあるから, 帰納法の仮定より 0 である.

したがって, $|A|$ の定義式で残るのは $k = i, j$ のときで,

$$|A| = (-1)^{i+1} a_{i1} \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{\acute{a}_i} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\acute{a}_i} \\ \vdots \end{vmatrix} + (-1)^{j+1} a_{j1} \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{\acute{a}_i} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\acute{a}_i} \\ \vdots \end{vmatrix}$$

右辺の最初の行列式は上の行と順に入れ替えていくと, $j-1-i$ 回の行交換で 2 番目の行列式と同じになる. $n-1$ 次の行列式については, 帰納法の仮定より, (D3) が成り立つから, そこから導かれる命題 a が成立する. したがって $j-1-i$ 回行を入れ替えると, 符号が $j-1-i$ 回入れ替わって, この第 1 項は

$$(-1)^{i+1} a_{i1} \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{\acute{a}_i} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\acute{a}_i} \\ \vdots \end{vmatrix} = (-1)^{j} a_{i1} \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{\acute{a}_i} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\acute{a}_i} \\ \vdots \end{vmatrix}$$

となる. ここで $a_{i1} = a_{j1}$であるから, 結局 $|A| = 0$ となる.
(D4) 定義式 (1) と帰納法の仮定から,

$$|E_n| = 1|E_{n-1}| = 1 \quad \square$$

(命題 a) 2 つの行ベクトル $\boldsymbol{a_i}$と $\boldsymbol{a_j}$を取り換えると, 元の行列式は -1 倍される.

$$|A| = \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a_i} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_j} \\ \vdots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a_j} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_i} \\ \vdots \end{vmatrix}$$

参考文献

木田雅成『線形代数学講義』 (培風館)

束論

3 年　小作　惇也
2 年　尾熊　涼　岩田　健吾
伊藤　良太郎

ゼミ紹介

ゲーテ著　高橋義孝訳　　『Fausut ファウスト [一]』　(新潮文庫)
(p, 126　l, 7　-　p, 130　l, 1)
より引用

書斎にて，悪魔 メフィスト - フェレス と 老学者 ファウスト が契約を交わす場面

ファウスト
いやいやそれだけではいけない。悪魔は利己主義で、
悪魔のただほど高いものはないはずだ。
なんでただ働きなどするものか。
はっきりと条件を出すがいい。
取極めをはっきりさせておかないとあとが怖い。

メフィスト - フェレス
そんなら、この世であなたにお仕え申して、
何事も仰せの如くに立ち働きましょう。
けれどもあの世でお会いしたら、
今度はあなたが家来になる、というのはいかがです。

ファウスト
あの世のことは己にはどうでもいい。
君がこの世を打壊してしまったあとに、
どんな世の中が生まれてこようと、それは構わぬ。
己の喜びが湧き出るのは、この世の、この大地からなのだ。
己の苦しみを照らすのは、この世の、この太陽なのだ。
己が死んでしまったそのあとのことは、
どうであろうと一向に構わぬ。
あの世にも愛と憎しみがあるかどうか、
あの世に主人と家来があるかどうか、
そんなことは己にとって
全くどうでもいいことなのだ。

メフィスト・フェレス
そういうお考えなら、どうです、手を打ちませんか。
御契約をなさいませんか。あなたがこの世にあるかぎりは、
わたしの術でたんと面白い目を見せて差上げます。
まだ人間の見たことのない面白いものをね。

ファウスト
君に何が見せられることやら。
気高い努力を続ける人間の精神が、
悪魔風情にわかったためしがあったろうか。
それとも君は、いくら食べても腹のふくれぬ御馳走、
水銀のようにつかまえにくく
君の手の中で散り失せる赤い金、
絶対に勝つということのない賭け事遊び、
己の胸に懐かれていながら、もう隣の男に渡りをつける女、
流星のように消え失せてしまう
名声という美しい神々のような快楽、
そんなものでも見せてくれるというのか。
もぎ取る前にもう腐る果実、
毎日新芽の出る木でも見せてくれるというのかね。

メフィスト・フェレス
そんな御注文なら朝飯前だ。
それしきのものでしたら、いつでもお目にかけましょう。
しかしね、先生、ゆっくりとうまいものでも
喰っていたいという、
そういう時がいずれやってきますぜ。

ファウスト
もし己がのんびりと寝そべっていたいなどと
思うようだったら、
その時は己ももうおしまいだ。
君にしてもしこの己に取入って
己がもうこれで満足というように持って行けたら、
己を快楽で誑しおおせたなら——
その時は己の負けだ。
どうだ賭けるか。

メフィスト・フェレス
賭けましょう。

ファウスト
間違いあるまいな。
己がある刹那に向かって、「とまれ、
お前はあまりにもに美しい」といったら、
己はお前に存分に料理されていい。
己は喜んで滅んでいく。
そうしたら葬式の鐘が鳴るがいい、
そのときは君の奉公も終るのだ。
時計が停り、針も落ちるがいい。
己のすべては終るのだ。

メフィスト・フェレス
本気ですね、わたしたちは忘れませんよ。

束とは

束は, 群や環に類似する代数の一つの分野である.
僕たちの班はこの束についてゼミを行い, ラティス (束) の基本的な性質, ラティスの代数的実例, ラティス準同型写像, ラティス恒等式, ラティス包含式, ブール代数の定義と実例 などを扱ってきた.
今回は紙面の都合上, 束の基本的な性質とその証明についてのみ紹介する.

束の基本的な性質

定義 (ラティス)

順序集合 L が束またはラティスであるとは,
L はその任意の元 x, y において,
部分集合 $\{x, y\}$ の最小上界および最大下界が存在するということである.
今後 $\{x, y\}$ の最小上界, 最大下界をそれぞれ $x \cup y$, $x \cap y$ と表す.
また $\cap$ をミート, $\cup$ をジョインと呼び, これらをラティス演算と呼ぶ.

補足
つまり, L がラティスであるとは次のようなことをいう.

$$L \text{ がラティス } \Leftrightarrow {}^{\forall}x, y \in L, {}^{\exists}\sup\{x, y\}, {}^{\exists}\inf\{x, y\} \in L$$

また, L の順序を $\prec$ としたとき, $x \cup y$, $x \cap y$ が $\{x, y\}$ の最小上界, 最大下界であるとは次のようなことをいう.

$$x \cap y \text{ が最大下界である.} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i) } x \cap y \prec x \text{ かつ } x \cap y \prec y \\ \text{(ii) } z \prec x \text{ かつ } z \prec y \Rightarrow z \prec x \cap y \end{cases}$$

$$x \cup y \text{ が最小上界である.} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)}' \ x \prec x \cup y \text{ かつ } y \prec x \cup y \\ \text{(ii)}' \ x \prec z \text{ かつ } y \prec z \Rightarrow x \cup y \prec z \end{cases}$$

これは, (i), (i)' が $x \cup y$, $x \cap y$ が下界, 上界であることを,
(ii), (ii)' がその最大性, 最小性を述べている.

さらに次の性質がある.

命題 1

$$\text{(iii)}\ x \prec y \ \Leftrightarrow\ x \cap y = x$$

$$\text{(iii)}'\ x \prec y \ \Leftrightarrow\ x \cup y = y$$

証明

(iii) について ($\Leftarrow$) は x が最大下界であると仮定するので (i) より直ちにわかる.
($\Rightarrow$) を示す.
$x \prec y$ と仮定する.

$$x \cap y = \inf\{x, y\} = \max\{a \mid a \prec x \text{ かつ } a \prec y\}$$

ここで $x \prec y$ であるため,

$$「a \prec x \text{ かつ } a \prec y」 \Leftrightarrow 「a \prec x \prec y」$$

であり, これから,

$$x \cap y = \max\{a \mid a \prec x \prec y\} = x$$

である.

(iii)' については双対の原理より,

$$「x \cap y = x」 \Leftrightarrow 「x \cup y = y」$$

であるため正しいとわかる. ■

定理 2 (ラティス恒等式)

1 つのラティスのどんな元 x, y, z に対しても, 以下の 3 つが成り立つ.
これらをラティス恒等式と呼ぶ.

交換律：$x \cap y = y \cap x$
$x \cup y = y \cup x$

結合律：$(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$
$(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$

吸収律：$x \cap (x \cup y) = x$
$x \cup (x \cap y) = x$

証明

$\cap$と $\cup$ は双対なので, それぞれの上の式のみ示す.
まず, 交換律について示すと,

$$x \cap y = \inf\{x, y\} = \inf\{y, x\} = y \cup x$$

というように成り立つ.
次に結合律については,

$$\begin{aligned}
(x \cap y) \cap z &= \inf\{\inf\{x, y\}, z\} \\
&= \max\{a \mid a \prec \inf\{x, y\} \text{ かつ } a \leq z\} \\
&= \max\{a \mid a \prec \max\{b \mid b \prec x \text{ かつ } b \prec y\} \text{ かつ } a \prec z\} \\
&= \max\{a \mid a \prec x \text{ かつ } a \prec y \text{ かつ } a \prec z\} \\
&= \max\{a \mid a \prec x \text{ かつ } a \prec \max\{b \mid b \prec y \text{ かつ } b \prec z\}\} \\
&= \max\{a, a \prec x \text{ かつ } a \prec \inf\{y, z\}\} \\
&= \inf\{x, \inf\{y, z\}\} \\
&= x \cap (y \cup z)
\end{aligned}$$

と成り立つ.
最後に吸収律については,

$$x \cap (x \cup y) = \inf\{x, x \cup y\} = \max\{a \mid a \prec x \text{ かつ } a \prec x \cup y\}$$

であるので, ここで $x \prec x \cup y$ より,

$$x \cap (x \cup y) = \max\{a \mid a \prec x \text{ かつ } a \prec x \cup y\} = x$$

プログラミングが止まるか分からなくてすみません... 今後とも改善に努めたい所存です...(低姿勢問題)(consome)

と成り立つ.

従ってラティス恒等式はラティスの任意の元に対しても成り立つ. ■

補足
結合律によると, 複数個の元のミートや複数個の元のジョインはその順番によらないので, $x \cap y \cap z$ や $x \cup y \cup z$ のように表すことができる.
また, $x \cap y \cap z = \inf\{x, y, z\}$ であることは先ほどの結合律の証明の (*) の式から直ちにわかると思う.
よって, 一般に, n 項のミートとジョインについても同様で,

$$x_1 \cap x_2 \cap \cdots \cap x_n = \inf\{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

$$x_1 \cup x_2 \cup \cdots \cup x_n = \sup\{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

が成り立つ.

さらに, ラティスとラティス恒等式について次の定理が成り立つ.

定理 3 (演算によるラティスの定義)
一般的な集合 A と演算 $\cup$, $\cap$ の組 (A , $\cup$, $\cap$) において, 次が成り立つ.

(A , $\cup$, $\cap$) でラティス恒等式が成り立つ $\Leftrightarrow$ A はラティス

この定理 3 の ($\Leftarrow$) に関しては, これは定理 2 そのものである.
よって, ここからは定理 3 の ($\Rightarrow$) について示していく.
これは, 左側を仮定したときに L が順序集合となることと L がラティスの定義を満たすことをいえばよい.
そのために次の命題 4, 5 を示す.

命題 4

L を集合 L と演算 $\cup$, $\cap$ の組 (L , $\cup$, $\cap$) とする.
L の元 x, y に対し, $x \prec y \quad \Leftrightarrow \quad x \cap y = x$ または $x \prec y \Leftrightarrow x \cup y = y$
と定めると, “$\prec$” は順序となる.

証明

吸収律をもちいれば, $x \cap y = x \Leftrightarrow x \cup y = y$ であることがわかるので, $x \prec y \Rightarrow x \cap y = x$ のみを示す.

まず, ”$\prec$” が順序であることを示すには, 任意の $x, y, z \in L$ に対して,
(1)$x \prec x$
(2)$x \prec y$ かつ $y \prec x \Rightarrow x = y$
(3)$x \prec y$ かつ $y \prec z \Rightarrow x \prec z$
の (1), (2), (3) が成り立つことを示せばよい.

(1) については, 吸収律 : $x \cap (x \cup y) = y$ の y に $x \cap y$ を代入すると,
$x \cap (x \cup (x \cap y)) = x$, $x \cap x = x$ となる.
よって $x \prec x$ は成り立つ.

(2) については, まず $x \prec y$ かつ $y \prec x$ であるとする.
つまり, $x \cup y = x$ かつ $y \cap x = y$ であるとすると,
交換律より, $x = x \cap y = y \cap x = y$ である.
よって, $x = y$ となる.

最後に (3) については, $x \prec y$ かつ $y \prec z$ であるとする.
つまり, $x \cap y = x$ かつ $y \cap z = y$ であるとすると, 結合律を用いることにより,

$$x \cap z = (x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z) = x \cap y = x$$

となる.
よって, $x \cap z = x$ すなわち, $x \prec z$ となる.
従って (1), (2), (3) が成り立つので, ” $\prec$ ” は順序である. ■

演算による定義によって順序を導入できるとわかったので,
最後にこの順序による最小上界, 最大下界について示そう.

命題 5

命題 4 によって定めた (L , $\cup$, $\cap$) と “$\prec$” の組 (L , $\cup$, $\cap$, $\prec$) について
次が成り立つ.
(L , $\cup$, $\cap$, $\prec$) の任意の元 x, y に対して,
$\inf\{x, y\} = x \cap y$, $\sup\{x, y\} = x \cup y$ となる.

証明

$\sup\{x, y\}$ と $\inf\{x, y\}$ は双対なので $\sup\{x,\ y\}$ のみを示す.
$\sup\{x, y\} = x \cup y$ を示すには, $x \cup y$ が x, y の上界の 1 つで, さらにその中で最大であることを示せばよい.

まず, $x \cup y$ が x, y の上界であることを示す.
$x, y \in L$ に対し, 吸収律よりつぎの 2 式

$$x \cap (x \cup y) = x, \quad y \cap (x \cup y) = y$$

が成り立つ.
よって, 交換律も用いれば, $x \prec x \cup y$, $y \prec y \cup x = x \cup y$ となり,
$x \cup y$ が上界であることがわかった.

次に, $x \cup y$ が x, y の上界の中で最小であることを示す.
$x \prec z$ かつ $y \prec z$ となる z を任意にとると,
$x \cup z = z$ かつ $y \cup z = z$ となるので, $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z) = x \cup z = z$
よって, $x \cup y \prec z$

従って, $\sup\{x, y\} = x \cup y$ とわかった. ■

命題 4, 5 から, 集合 L と演算 $\cup$, $\cap$ の組 (L , $\cup$, $\cap$) にラティス恒等式が成り立てば, (L , $\cup$, $\cap$) には順序が定まり, その任意の元 x, y に対して最小上界と最大下界が存在することがわかった.
よって (L , $\cup$, $\cap$) はラティスとなり, 定理 3 が成り立つ.

この定理によりラティスは順序を切り離し, ラティス恒等式の成り立つ代数系としてとらえることができるようになる.

束を導入することで順序関係について演算を用いて考えることができるようになる.
その整合性についての証明が今回の内容であった.
さらにこの束の演算における性質やほかの代数系との対応, 束から束への写像などを考えることにより, 順序集合はさらに詳しく調べることができるようになる.

参考文献　岩村 聯 著 『束論』 (共立出版株式会社)
ゲーテ 著 高橋義孝 訳 『Faust ファウスト [一]』 (新潮文庫)

～メモ帳～

数列の極限じゃい

1 年　氏名 中村 光太郎
秋葉 翔太
片岡 岳
鶴口 泰寛

1　班員紹介

No.1　中村　光太郎
Kotaro Nakamura
「僕は班長ですが使えなくてごめんなさい. 」

No.2　秋葉　翔太
Syota Akiba
「私の名前はアキバです. 」
「新興宗教防災訓練国庫負担金反復横跳び」

No.3　片岡　岳
Gaku Kataoka
「数岳科に来たけど数岳が苦手な数岳科の岳です. ※班長作」

No.4　鶴口　泰寛
Taikan Tsuruguchi
「アナライズアーティファクト！アナライズアーティファクト！」

……

これから語られるのは
中村と愉快な仲間たちによって繰り広げられる
10 年に続いた旅の話である.

……

2　実数の連続性 $\mathbb{R}$ とは？

(i) 四則演算
(ii) 順序に関する公理
(iii) 連続性の公理を満たす集合

今回は, (iii) についてのみ説明する.

Def　$A \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$ とする.
m は A の最大値 (最小値)$\Leftrightarrow$ (i) 任意の $x \in A$ に対して, $x \leq (\geq) m$
(ii) $m \in A$

このとき, m を maxA, (minA) と書く.

Def　$A \subset \mathbb{R}$, $m \in M \subset \mathbb{R}$ とする.
m は A の上界 (下界)$\Leftrightarrow$ 任意の $a \in A$ に対して, $a \leq (\geq) m$
m は A の上限 (下限) $\Leftrightarrow$ m は A の上界 (下界) かつ
M の最小値 (最大値)

このとき, m を supA, (infA) と書く.

$A \subset \mathbb{R}$ に対して, 有界と下界が存在するとき, A は有界という.
また,$A \subset \mathbb{R}$ に対して, 上限と下限が存在するとき, A は有限という.

連続性の公理

$A \neq \phi$, $A \subset \mathbb{R}$ とする.
A が上 (下) に有界 $\Rightarrow$ supA, (infA) $\in \mathbb{R}$ が存在する.

3　数列の極限

Def　$\{a_n\}$ が α に収束 $\Leftrightarrow {}^{\forall}\varepsilon > 0$, ${}^{\exists}N \in \mathbb{N}$ $s.t.$ ${}^{\forall}n \geq N$, $|a_n - \alpha| < \varepsilon$

Def　$\{a_n\}$ が $+\infty(-\infty)$ に発散 $\Leftrightarrow {}^{\forall}\mathrm{M} > 0$, ${}^{\exists}N \in \mathbb{N}$ $s.t.$
${}^{\forall}n \geq N$, $a_n > M(< M)$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{収束}$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty(-\infty) \quad \text{発散}$$

Def　$\{a_n\}$ が振動する. $\Leftrightarrow \{a_n\}$ が収束しないかつ, 発散しない.

ここで, 以下の定理を示す

Thm　$\{a_n\}$ が収束 $\Rightarrow \{a_n\}$ は有界

$\because$) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とする. 収束の定義より
${}^{\exists}N \in \mathbb{N}$ $s.t.$ ${}^{\forall}n \leq N, |a_n - \alpha| < \varepsilon$.
よって $\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$
ここで $\varepsilon = 1$ とし,
$M_* := \min\{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, \cdots \quad \mathrm{a}_{\mathrm{N}+1}, \alpha - 1\}$
$M^* := \max\{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, \cdots \quad \mathrm{a}_{\mathrm{N}+1}, \alpha + 1\}$
と定めると $M_* \leq a_n \leq M^*$ となり, $\{a_n\}$ が有界であることが示せた.

∗ $\{a_n\}$ は有界 $\Rightarrow \{a_n\}$ が収束 の反例 : a_n が振動する

Thm　はさみうちの定理

$\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ が $a_n \leq b_n \leq c_n$ $(n \geq 1)$ を満たすとする. このとき,
$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$　が成り立つ.

∵）仮定より , 収束の定義から

$^{\forall}\varepsilon > 0, ^{\exists}N_1, N_2 \in \mathbb{N}\ s.t.\ |a_n - \alpha| < \varepsilon\ (n \geq N_1),\ |c_n - \alpha| < \varepsilon\ (n \geq N_2)$

$N = \max\{N_1, N_2\}$ とすれば $^{\forall}n \geq N$ について

$\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha - \varepsilon,\ \alpha - \varepsilon < c_n < \alpha + \varepsilon$

ここで、 $a_n \leq b_n \leq c_n$ を用いて

$\alpha - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \alpha + \varepsilon$

すなわち　$|b_n - \alpha| < \varepsilon\ (n \geq N)$ となり

$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ が示せた.

数列の極限の四則演算

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする. このとき, 以下が成り立つ.

(i)　$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$

(ii)　$\lim_{n\to\infty} Ca_n = C\alpha$　　(C は定数)

(iii)　$\lim_{n\to\infty} (a_n \times b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha \times \beta$

(iv)　$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

(i) ∵）仮定より

$^{\forall}\varepsilon_a > 0, ^{\exists}N_a \in \mathbb{N}\ s.t.^{\forall}n \geq N_a,\ |a_n - \alpha| < \varepsilon_a$

$^{\forall}\varepsilon_b > 0, ^{\exists}N_b \in \mathbb{N}\ s.t.^{\forall}n \geq N_b,\ |b_n - \beta| < \varepsilon_b$

これより $-\varepsilon_a + \alpha < a_n < \varepsilon_a + \alpha,\ -\varepsilon_b + \alpha < b_n < \varepsilon_b + \alpha$ が成立する. よって

$|a_n + b_n - (\alpha + \beta)| < \varepsilon_a + \varepsilon_b = \varepsilon$

ここで, $N := \max\{N_a, N_b\}$ と定めれば, $^{\forall}n \geq N$ で

$|a_n + b_n - (\alpha + \beta)| < \varepsilon$ となり, 収束することが示せた.

(ii) ∵）仮定より

$^{\forall}\varepsilon > 0, ^{\exists}N \in \mathbb{N}\ s.t.^{\forall}n \geq N,\ |a_n - \alpha| < \varepsilon$ これより

$|Ca_n - C\alpha| = |C||a_n - \alpha| < |C|\varepsilon = \varepsilon'$　($\varepsilon' = |C|\varepsilon$ と置いた)

よって, 収束することが示せた.

(iii) ∵）仮定より

$^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}N_a \in \mathbb{N}\ s.t.{}^{\forall}n \geq N_a,\ |a_n - \alpha| < \varepsilon$

$^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}N_b \in \mathbb{N}\ s.t.{}^{\forall}n \geq N_b,\ |b_n - \beta| < \varepsilon$ これより

$|a_n b_n - \alpha\beta| = |b_n(a_n - \alpha) + \alpha(b_n - \beta)|$

三角不等式を用いて

$\leq |b_n(a_n - \alpha)| + |\alpha(b_n - \beta)|$

$\leq |b_n||(a_n - \alpha)| + |\alpha||(b_n - \beta)|$ ここで

$|a_n - \alpha| < \varepsilon \ \ (n \geq N_a)$

$|b_n - \alpha| < \varepsilon\ (n \geq N_b)$

また, 収束する数列は有界であることから

$M \in \mathbb{R},\ |b_n| \leq M \ \ (n \geq 1)$

これらより, $^{\forall}n \geq N = \max\{N_a, N_b\}$ に対して

$$|a_n b_n - \alpha\beta| \leq \underbrace{|b_n|}_{\leq M}\underbrace{|(a_n - \alpha)|}_{<\varepsilon} + |\alpha|\underbrace{|(b_n - \beta)|}_{<\varepsilon}$$

$$< (M + |\alpha|)\varepsilon = \varepsilon' \ \ (\varepsilon' = (M + |\alpha|)\varepsilon \text{ と置いた})$$

よって, 収束することが示せた.

(iv) ∵) $\lim_{n\to\infty} a_n \dfrac{1}{b_n}$ より, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{\beta}$ を示す.

収束の定義より

$^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}N \in \mathbb{N}\ s.t.{}^{\forall}n \geq N,\ |b_n - \beta| < \varepsilon$

$^{\forall}\varepsilon_b > 0, {}^{\exists}N_b \in \mathbb{N}\ s.t.{}^{\forall}n \geq N_b,\ |b_n - \beta| < \varepsilon_b$

今, $\varepsilon > \varepsilon_b = \frac{|\beta|}{2}$ とすると

$|\beta| = |\beta - b_n + b_n| < \varepsilon + |b_n|$ から

$|b_n| > \frac{|\beta|}{2}$ これより

$^{\forall}n \geq N' = \max\{N, N_b\}$ に対し

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta}\right| = \left|\frac{\beta - b_n}{b_n\beta}\right| < \frac{2|b_n - \beta|}{|\beta^2|} < \frac{2\varepsilon}{|\beta^2|} = \varepsilon' \ \ \left(\varepsilon' = \frac{2\varepsilon}{|\beta^2|} \text{ と置いた}\right)$$

よって, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{\beta}$

(iii) を利用して、$\lim_{n\to\infty} a_n \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ が示せた.

参考文献

鈴木 武・山田 義雄・柴田 良弘・田中 和永　共著『理工系のための微分積分 1』(内田老鶴圃)

広義積分

1 年　氏名青木　佑斗
鈴木　恒輝
佐川　夏美
小林　夕夏

鈴木が勝ったから、ビッグ 5 も残りあと 2 人。でも、追い詰められて積分経験のないちゃんを狙ったりしないかしら？やっぱりちゃんが積分始めちゃってる！え？小林ちゃんも青木と一緒なの？3 対 1 で一見有利な対戦だけど、青木は素人同然だし本当に大丈夫？次回、『男の花道、青木玉砕』デュエルスタンバイ！

1　広義積分の定義

定義 1

$f(x)$ は [a,b) または (a,b] で連続
$f(x)$ の [a,b) または (a,b] での積分を以下のように定義する.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

$$\left(\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx\right)$$

またこのとき, 右辺の極限が存在するとき, 積分は収束
右辺の極限が存在しないとき積分は発散するという.

さらに $f(x)$ が $[a,\infty)$または $(-\infty,b]$ で連続ならば
$f(x)$ の $[a,\infty)$または $(-\infty,b]$ の積分を以下のように定義する.

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)dx$$

$$\left(\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{R\to-\infty}\int_R^b f(x)dx\right)$$

収束, 発散については上に同じ.

これらの定義に基づいて行われる積分を広義積分という.

例 広義積分の例として $f(x)=\frac{1}{x^a}(a>0)$ 積分区間 $[0,1]$ で議論してみる.

この時, $x\to 0$ のとき $f(x)$ は非有界なので

$$I_a=\int_0^1 f(x)dx$$

とすると, $a\neq 1$ の時

$$\begin{aligned} I_a &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^a}dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}[x^{1-a}]_\varepsilon^1\times\frac{1}{1-a} \end{aligned}$$

以上より

$$\frac{1}{1-a}(0<a<1)$$

$$\infty\ (a>1)$$

$a=1$ の時,

$$I_a=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\frac{1}{x}dx=\lim_{\varepsilon\to+0}[\mathrm{logx}]_\varepsilon^1=\infty$$

定義 2

$f(x)$ が (a,b) で連続であるとする. (両端不連続)
$f(x)$ の積分は, $c\in(a,b)$ をとり

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a-\varepsilon}^c f(x)dx+\lim_{\eta\to+0}\int_c^{b-\eta}f(x)dx$$

と定義する.

ここにおいて ε,η を独立に 0 に近づけることがポイントである.
上記の定義と同様に, $f(x)$ が $(-\infty,\infty)$ での
有界連続関数であるときの積分は, $c\in(-\infty,\infty)$ をとり

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\lim_{s\to-\infty}\int_s^c f(x)dx+\lim_{r\to\infty}\int_c^r f(x)dx$$

で定義し, r, s はそれぞれ独立に動かす.

例

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx &= \lim_{s\to-\infty}\int_{s}^{c}\frac{1}{1+x^2}dx+\lim_{r\to\infty}\int_{c}^{r}\frac{1}{1+x^2}dx\\ &= \lim_{r\to\infty}\arctan r-\lim_{s\to-\infty}\arctan s\\ &= \pi\end{aligned}$$

となる.
さらに, $c\in(a,b)$ ととるとき、 $f(x)$ が $[a,c)\cup(c,b]$ で連続ならば
$f(x)$ の $[a,b]$ の積分は (不連続点がある).

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{c-\varepsilon}f(x)dx+\lim_{\eta\to+0}\int_{c+\eta}^{b}f(x)dx$$

によって定義される
このときも ε,η は独立に 0 に近づける.
原始関数がすぐに定まらないような関数に対する広義積分の収束・発散の判定を考えてみる

定理

$f(x)$ は $[a,b)$ で連続, かつ $\lim_{x\to b-0}|f(x)|=\infty$ とする.
(i) $\int_a^b f(x)dx$ が収束 $\Leftrightarrow {}^{\forall}\varepsilon>0,\ {}^{\exists}\delta>0$ をとれば
$b-\delta<x_1<x_2<b$ なる ${}^{\forall}x_1,\ x_2$ に対して
$\left|\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx\right|<\varepsilon$
(ii) [a,b] 上の連続関数 $g(x)$ が $|f(x)|\geq g(x)$ をみたし

$$\int_a^b f(x)dx \text{ が収束} \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \text{ は収束.}$$

証明
(i) コーシーの判定法を用いる.

(review) コーシーの判定法

関数 $f(x)$ が点 a の周りで定義されているとき
$\lim_{x\to a} f(x)$ が存在 $\Leftrightarrow {}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}R > 0$ s.t.
${}^{\forall}x_1 > R, {}^{\forall}x_2 > R, |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$
関数 $f(x)$ が $x > b$ で定義されてるとき

$$\text{極限 } \lim_{x\to\infty} f(x) \text{ が存在する} \iff {}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}R > 0 \text{ s.t.}$$

$${}^{\forall}x_1, x_2 (x_1 > R, x_2 > R \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$$

となることである.

ここで, $F(x) = \int_a^x f(y)dy$ とおけば,
題意は $\lim_{x\to b-0} F(x)$ が存在すること $\cdots (*)$
$(\Rightarrow)$ については仮定より自明.
$(\Leftarrow)$ について, $(*)$ より仮定を式変形すると

$$b - \delta < x_1 < x_2 < b + \delta$$

すなわち $0 < |x_1 - b| < \delta$ かつ $0 < |x_2 - b| < \delta$
となり

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx &= \int_a^{x_2} f(y)dy + \int_{x_1}^{a} f(y)dy \\ &= F(x_2) - F(x_1)\end{aligned}$$

また仮定より
$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$ なので
$|F(x_2) - F(x_1)| < \varepsilon$ ゆえにコーシーの判定法より示される.
(ii) の証明
$a < x_1 < x_2 < b$ のとき
$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| \le \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,dx \le \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx$ が成立することに注意する.
仮定より $\int_0^b g(x)dx$ は収束するので
上の不等式において, $x_1 \to b, x_2 \to 0$ のときは右辺は 0 に収束
$x_1, x_2 \to 0$ なら左辺は 0 に収束することがわかる.
また x_1, x_2 が 0 に近づかないときについては左辺において (i) より
0 に収束することが分かるので, $\int_a^b f(x)dx$ も収束. □

次に積分区間が非有界の場合での広義積分の収束・発散について考えてみる.

定理

$f(x)$ は $[a,\infty)$ で定義された有界な連続関数
(1) 積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ が収束 $\Leftrightarrow {}^\forall\varepsilon>0, R$ を十分大きくとると $R<x_1<x_2$なるすべての x_1, x_2について

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right|<\varepsilon$$

(2) $[a,\infty)$ 上の連続関数 $g(x)$ が $|f(x)|\leq g(x)$ をみたし, $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ が収束すれば $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ は収束する.

証明

(1) $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ は $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\int_a^k f(x)dx$ と書ける.
コーシーの判定法より示された. □

(2) $\displaystyle\left|\int_a^\infty f(x)dx\right|\leq\int_a^\infty |f(x)|\,dx\leq\int_a^\infty g(x)dx$
(1) の結果より, $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ が収束することがわかる. □

2　例題

(1)$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ が収束することを示せ.

解

$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1$ より $\frac{\sin x}{x}$ は有界な連続関数だから, 非有界区間での広義積分の収束性を示す

$0 < p < q$ とすると

$$\begin{aligned}\left|\int_p^q \frac{\sin x}{x}dx\right| &= \left|\left[-\frac{\cos x}{x}\right]_p^q + \int_p^q \frac{\cos x}{x^2}dx\right| \\ &\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \int_p^q \frac{1}{x^2}dx \\ &= \frac{2}{p}\end{aligned}$$

以上より, 右辺 $\to 0$ $(p \to \infty)$ なので示された. □

(2)$\displaystyle\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx$ が発散することを示せ.

解

$^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}\int_{(n+1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx &\geq \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{(n+1)\pi}^{n\pi} |\sin x|dx \\ &= \frac{2}{(n+1)\pi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\infty^0 \frac{|\sin x|}{x}dx &= \sum_{n=0}^\infty \int_{(n+1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx \\ &\geq \sum_{n=0}^\infty \frac{2}{(n+1)\pi} \\ &= \infty\end{aligned}$$

□

differential equations

3 年 小粥 和貴
2 年 大橋 拳斗
竹山 和希
夏苅 歩夢

班紹介：私達の班の機関紙のメンバーは夏苅歩夢、竹山和希、大橋拳斗の 3 人です。夏苅君はいつもウイイレばかりやっていますが、 やるときはやる良い子です。竹山君はいつも遅刻ばかりしていますが、真面目で良い子です。大橋君は授業には来ていませんが、毎日しっかりと学校に来る良い子です。

1. 1階線形微分方程式

次に表される微分方程式を線形微分方程式とよぶ.

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + f_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + f_n(x)y^{(0)} = g(x)$$

また, $g(x) \equiv 0$ であるような場合を同次形と呼ぶ. 今回は, 次で表せるような 1 階線形微分方程式を扱う.

$$y' + f(x)y = g(x)$$

◇ 1 階線形微分方程式の解き方

$$y' + f(x)y = g(x) \cdots (1)$$

まず, $g(x) \equiv 0$ の場合を考える.

$$y' + f(x)y = 0 \cdots (2)$$

$$\frac{1}{y}y' = -f(x)$$

両辺を x で積分して

見たことありそうでないものシリーズ⑭極限と積分の入れ替わる定理でファトゥの補題推しの人（↑ $m\phi cchan$）

$$\int \frac{dy}{y} = -\int f(x)dx$$

$$\log(|y|) = -\int f(x)dx + C_1 \quad (C_1\text{は積分定数})$$

よって,

$$y = \pm e^{C_1} e^{-\int f(x)dx} \quad (C_1\text{は積分定数})$$

ここで, C を x の関数と見なして

$$y(x) = C(x)e^{-\int f(x)dx} \cdots (3)$$

と置く.

$$y'(x) = C'(x)e^{-\int f(x)dx} + C(x)(-f(x))e^{-\int f(x)dx}$$

$$y'(x) = (C'(x) - f(x)C(x))e^{-\int f(x)dx} \cdots (4)$$

(3), (4) を (1) 式に代入すると,

$$(C'(x) - f(x)C(x))e^{-\int f(x)dx} + f(x)C(x)e^{-\int f(x)dx} = g(x)$$
$$C'(x)e^{-\int f(x)dx} = g(x)$$
$$C'(x) = g(x)e^{-\int f(x)dx}$$

ここで, 両辺を x で積分して

$$C(x) = \int \{g(x)e^{-\int f(x)dx}\}dx + C_2 \quad (C_2\text{は任意の定数})$$

これを (3) 式に代入したものが (1) 式の解で,

$$y(x) = (\int \{g(x)e^{-\int f(x)dx}\}dx + C_2)e^{-\int f(x)dx}$$

このような方法を定数変化法と呼ぶ.

例) $y' + xy = x^2 \cdots (1)$

まず, $y' + xy = 0$ を解くと.

$\frac{y'}{y} = -x$ となり, ここで両辺積分して,

$$\int \frac{y'}{y}dy \;=\; -\;\log(|y|)$$

$$\log(|y|) \;=\; -\;\frac{1}{2}x^2 \;+\; C_1 \quad (C_1\text{は積分定数})$$
$$y \;=\; \pm\; e^{-\;\frac{1}{2}x^2}e^{C_1}$$
$$y \;=\; Ce^{-\;\frac{1}{2}x^2} \quad (C\text{ は }0\text{ を除く積分定数})$$

ここで, $y \;=\; C(x)e^{-\;\frac{1}{2}x^2}$ を満たすような C(x) を考える.

$$y' \;=\; C'(x)e^{-\;\frac{1}{2}x^2} \;-\; xC(x)e^{-\;\frac{1}{2}x^2} \;=\; C'(x)e^{-\;\frac{1}{2}x^2} \;-\; xy$$

これを (*) に代入すると, $C'(x) \;=\; x^2e^{\frac{1}{2}x^2}dx \;+\; C_2$ が得られる.
よって, 求める一般解は

$$y \;=\; x \;-\; e^{-\;\frac{1}{2}x^2}\int e^{\frac{1}{2}x^2dx} \;+\; Ce^{-\;\frac{1}{2}} \quad \text{となる.}$$

2. 2階線形微分方程式 (2階 L.D.E)

関数 y について,

$$y'' \;+\; P(x)y' \;+\; Q(x)y \;=\; R(x) \;\cdots\; (1)$$

を 2 階線形微分方程式といい, $R(x) \;=\; 0$ の時を, 特に同次 2 階線形微分方程式という. この名称に対して, $R(x) \;\neq\; 0$ のときを非同次 2 階線形微分方程式という. 以下, (1) の左辺を $L(y)$ で表す.

例) $y_1(x)$, $y_2(x)$ が同次方程式 $L(y) \;=\; 0$ の解であれば, 任意の定数 C_1, C_2 に対して, $C_1y_1(x) \;+\; C_2y_2(x)$ も $L(y) \;=\; 0$ の解である.

証) $y_1(x)$, $y_2(x)$ が同次方程式 $L(y) \;=\; 0$ の解だから,

$$y_1'' \;+\; P(x)y_1' \;+\; Q(x)y_1 \;=\; 0 \;\cdots\; (2)$$

$$y_2'' \;+\; P(x)y_2' \;+\; Q(x)y_2 \;=\; 0 \;\cdots\; (3)$$

が成り立つ. (2) $\times\; C_1 \;+\;$ (3) $\times\; C_2$ より,
$(C_1y_1'' \;+\; C_1P(x)y_1' \;+\; C_1Q(x)y_1) \;+\; (C_2y_2'' \;+\; C_2P(x)y_2' \;+\; C_2Q(x)y_2\;) \;=\; 0$
$\iff (C_1y_1'' \;+\; C_2y_2'') \;+\; P(x)(C_1y_1' \;+\; C_2y_2') \;+\; Q(x)(C_1y_1 \;+\; C_2y_2) \;=\; 0$

$$\Longleftrightarrow (C_1y_1 + C_2y_2)'' + P(x)(C_1y_1 + C_2y_2)' + Q(x)(C_1y_1 + C_2y_2) = 0$$

が成り立つので, $(C_1y_1 + C_2y_2)$ も $L(y) = 0$ の解である. □

次に 2 つの関数 $u(x),\ q(x)$ の 1 次独立性について説明する.
$u(x),\ q(x)$ が 1 次独立であるとは, $C_1,\ C_2$ を定数として, $C_1u(x) + C_2q(x) = 0$ が恒等的に成り立てば, 必ず $C_1 = C_2 = 0$ である場合をいう.

また, $u(x),\ q(x)$ が 1 次独立でないとき, $u(x),\ q(x)$ は 1 次従属であるという.
$u(x),\ q(x)$ が 1 次従属であれば, $C_1 \neq 0$ または $C_2 \neq 0$ で $C_1u(x) + C_2q(x) = 0$ となる $C_1,\ C_2$ が存在する. $C_1 \neq 0$ ならば, $u(x) = -\frac{C_2}{C_1}q(x)$ であり,
$C_2 \neq 0$ ならば $q(x) = -\frac{C_1}{C_2}u(x)$ である. すなわち $u,\ q$ のうち一方が他方の定数倍である.

逆に, C を定数として, $u(x) = Cq(x)$ であれば, $1 \cdot u(x) + (-C) \cdot q(x) = 0$ であるから, $u(x),\ q(x)$ は 1 次従属である.

したがって, 2 つの関数が 1 次独立であるための必要十分条件は一方が他方の定数倍にならないことがある。

例) 1 次独立 $= x^2$ と x^3, $\sin x$ と $\cos x$
1 次従属 $= \log(x^2)$ と $\log(x^3)$

ある 2 つの関数 $u(x),\ q(x)$ が 2 階線形同次微分方程式の 1 次独立な基本解であるかどうかを容易に判定できる量として, ロンスキャンと呼ばれる量がある.

定義

2 つの関数 $u(x),\ q(x)$ のロンスキャン $W(u(x),\ q(x))$ とは,
$W : = u(x)q(x)' - u(x)'q(x)$

例)
(i) $u(x) = x^m,\ q(x) = x^n$
$W(x^m, x^n) = x^m \cdot nx^{n-1} - mx^{m-1}x^n = (n-m)x^{m+n-1}$

(ii) $u(x) = \cos x,\ q(x) = \sin x$
$W(\cos x, \sin x) = \cos x \cos x - (-\sin x)\sin x = 1$

3. ベルヌイの微分方程式とリッカチの微分方程式

ベルヌイの微分方程式

$$y' + f(x)y = g(x)y^n \cdots *$$

$*$ の解法

解)$n = 0$ のとき $*$ は線形微分方程式であり,

$n = 1$ のとき $*$ は変数分離形だから成り立つ.

次に $n \neq 0$, $n \neq 1$ のときを考える.

$z = y^{1-n}$ とおき, この両辺を微分すると $z' = (1-n)y^{-n}y'$

両辺に y^n をかけると $y^n z' = (1-n)y' \quad \therefore y' = \dfrac{y^n z'}{1-n}$

これを $*$ に代入すると

$$\frac{y^n z'}{1-n} + f(x)y = g(x)y^n$$

$$\frac{z'}{1-n} + f(x)y^{1-n} = g(x)$$

$$\frac{z'}{1-n} + f(x)z = g(x)$$

$$z' + (1-n)f(x)z = (1-n)g(x)$$

これは 1 階線形微分方程式 (L.D.E) だから $y' + f(x)y = g(x)$ の一般解が

$$y = e^{\int f(x)dx}\left(\int (g(x)e^{\int f(x)dx}dx + C\right)$$

であることを用いると,

$$z = e^{-\int (1-n)f(x)dx}\left(\int (1-n)g(x)e^{-\int (1-n)f(x)dx}dx + C\right)$$

$$\therefore y^{1-n} = e^{-\int (1-n)f(x)dx}\left(\int (1-n)g(x)e^{-\int (1-n)f(x)dx}dx + C\right)$$

例) $y' = xy + x^2y^3 \cdots (1)$ の一般解を求める.

解)(1) は $n = 3$ のベルヌイの微分方程式だから,

$z = y^{-2}$ とおくと, 線形方程式 $z' + 2xz = -2x^2$ が成り立つ.

この一般解は $z = \mathrm{e}^{-x^2}(C - 2\int x^2 e^{x^2}dx)$

中国語は分かる.（↑ $m\phi cchan$）

だから, もとの方程式の一般解は

$$y^2 = \frac{e^{x^2}}{C - 2\int x^2 e^{x^2} dx}$$

リッカチの微分方程式

$$y' = f(x) + g(x)y + h(x)y^2 \cdots \star$$

$\star$ の解法

解)$\varphi(x)$ をリッカチの微分方程式の一つの解として,

$y = u + \varphi(x)$ とおく.

すると, $u' = y' - \varphi'(x)$

$$= (f(x) + g(x)y + h(x)y^2) - (f(x) + g(x)\varphi(x) + h(x)(\varphi(x))^2)$$

$$= (g(x) + 2h(x)\varphi(x))u + h(x)u^2$$

これは u に関するベルヌイの微分方程式だから, $*$ を求めた時と同様にして,

$z = (y - \varphi(x))^{-1}$とおくと,

$$y = \varphi(x) + \frac{1}{Cf(x) + g(x)}$$と求まる.

参考文献

古屋　茂 『新版　微分方程式入門』 (サイエンス社)

走れ部長(距離ヌンティウス空間)

3 年　氏名 萩原 雄一郎
2 年　氏名 高橋 優太
荒田 健翔
伊東 優太
梅田 弘海

1　ゼミ紹介

おたじいのおたじいによるおたじいのための距離空間班です (リンカーン)
with 雄一郎とゆかいな萩原 children たち（偏差値 20）で構成されたゼミ班です.
気になる方はこちらの下の URL をクリック (年会費無料）
http://www.tokyodomecity.jp/jetcoaster/noritai
やめて!萩原雄一郎の特殊能力で, 梅田弘海を焼き払われたら, Euclid 距離で KEY'SCAFE(2 号館) と繋がってるおたじいの精神まで燃え尽きちゃう！お願い, 死なないでおたじい！あんたが今ここで倒れたら, 荒田さんや伊東（偽）との約束はどうなっちゃうの？ゼミノートの余白はまだのこってる（嘘です）. ここを耐えれば, 雄一郎に（幾何分野で）勝てるんだから！次回, 「27 死す」デュエルスタンバイ！
誰か明日タピりに行きませんか? 明日の 10 時にハチ公前集合!!
このようにボケの押収でしかない (うるさい) 私たちですがとてもとてもみんな真面目に活動しました. これじゃメンバー紹介にならないので班長が責任取ります w この班の目的は討伐隊でした (マジ) そのコンセプトの上で見てください. みんなで挑みましたが無理でした ww(強すぎた部長)

萩原 雄一郎…我が部の部長!!!この人の数学を好きな度合いといったら 2 年生全員で挑んで五分五分くらいのやる気, 我ら討伐隊の標的となる (意図的)

高橋 優太…この班の班長兼新入部員, 0 知識からこのゼミを始めて大変でした (おたじいは私です)

荒田 健翔…解析をこよなく愛し愛された音ゲー好きな人.
愛称はもちろん「まっけん」(解析しかできない.by まっけん)

伊東 優太…この班に最後に叩き込まれた 1 人, 恐らく 1 番被害にあったのは彼であろうというのは言うまでもなく事実である.

梅田 弘海…ゼミが大好きな我が班の中立役
この濃すぎる軍団をまとめてくれてありがとう.

2　距離空間の定義

距離の定義

X をϕ でない集合とする. 関数 d を直積集合 $X \times X$ から $\mathbb{R}$ への写像とする.
このとき, 関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が X 上の距離関数であるということを定義する.
$d : X \times X \to \mathbb{R}$ が X 上の距離関数 $\overset{\text{def}}{\iff}$ d が以下の条件 (1)〜(3) を満たす

(1) $^{\forall}x, y \in X,\ d(x,y) \geq 0$ さらに, $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(2) $^{\forall}x, y \in X,\ d(x,y) = d(y,x)$

(3) $^{\forall}x, y, z \in X,\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が X 上の距離関数であるとき, 集合 X と距離関数 d の組 (X, d) を距離空間という.

次に距離空間の例を示す.

3 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^3, d)$

$d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を以下で定める.
$x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

このとき, $(\mathbb{R}^3, d)$ は距離空間である.

$\because$
距離の定義 (1) から (3) までが成り立つことを確かめる.
(1)
$^{\forall}i \in \{1,2,3\}$ に対し $(x_i - y_i)^2 \geq 0$ より

$$d(x,y) \geq 0$$

であるとわかる. 次に後半を示す.

$$\begin{aligned} d(x,y) = 0 &\iff \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} = 0 \\ &\iff {}^{\forall}i \in \{1,2,3\},\ (x_i - y_i)^2 = 0 \\ &\iff {}^{\forall}i \in \{1,2,3\},\ x_i = y_i \\ &\iff x = y \end{aligned}$$

よって (1) が成立するとわかる.

(2)
$^{\forall}i \in \{1,2,3\}$, $(x_i - y_i)^2 = (y_i - x_i)^2$ より

$$d(x,y) = d(y,x)$$

が成立するとわかるので (2) が成立する.
(3)
$z = (z_1, z_2, z_3) \in X$ とする. 示すのは

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i - z_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(y_i - z_i)^2}$$

$a_i = x_i - y_i$, $b_i = y_i - z_i$ とおくと以下のように書き換えられる.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{3}a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{3}b_i^2}$$

$$\sum_{i=1}^{3}(a_i + b_i)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{3}a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{3}b_i^2}\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{3}a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{3}a_i b_i + \sum_{i=1}^{3}b_i^2 \leq \sum_{i=1}^{3}a_i^2 + \sum_{i=1}^{3}b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{3}a_i^2 \sum_{i=1}^{3}b_i^2}$$

$$\sum_{i=1}^{3}a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{3}a_i^2 \sum_{i=1}^{3}b_i^2}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{3}a_i b_i\right) \leq \left(\sum_{i=1}^{3}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{3}b_i^2\right)$$

と書き換えられる. この不等式はシュワルツの不等式なので成立するとわかる.
よって (3) が成立. 以上より距離の定義を 3 つ満たすため $(\mathbb{R}^3, d)$ は距離空間である.

□

3　近傍と開集合

次に距離空間における開集合を定義するために近傍などを定義する.
開近傍については連続の定義でも使用します.

開近傍の定義

(X,d) を距離空間とする.
$x \in X$ を中心とする$\varepsilon > 0$ の開球体 $B(x;\varepsilon)$ を

$$B(x;\varepsilon) = \{y \in X | d(x,y) < \varepsilon\}$$

によって定める. $B(x;\varepsilon)$ を開近傍とも言う.
(半径 $\varepsilon > 0$ というのは距離関数 d での値のこと)

近傍の定義

X の部分集合 N が点 x の X における近傍であるとは

$$^{\exists}\varepsilon > 0 \text{ s.t. } B(x;\varepsilon) \subset N$$

が成り立つことを言う.

次に開集合について定義する.

開集合の定義

(X,d) を距離空間とする. X の部分集合 U が X の開集合であるとは

$$^{\forall}x \in U, ^{\exists}N : x \text{ の近傍 s.t. } N \subset U$$

が成り立つときと定義する.
x の近傍として分かりやすいものとして x を中心とする開球体を用いれば

$$U \text{ が } x \text{ の開集合である.} \iff ^{\forall}x \in U, ^{\exists}\varepsilon > 0 \text{ s.t. } B(x;\varepsilon) \subset U$$

と言い換えられる.

この開集合などの概念はこの後の同値命題で登場します.

4　距離空間と連続

まず基本的な連続の定義を記した後に距離を使って書き換えていきます。

連続写像の定義 1

距離空間 $(X, d_X)(Y, d_Y)$ について. 写像 $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ とする.

$$f \text{ が点 } a \text{ で連続} \overset{\text{def}}{\iff} {}^{\forall}\varepsilon > 0\ {}^{\exists}\delta > 0 \text{ s.t. } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

このように連続を定義する.

次に距離を用いて書き直すと次のようになる.

連続の定義 2

距離空間 $(X, d_X)(Y, d_Y)$ について. 写像 $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ とする.

$$f \text{ が点 } a \text{ で連続} \overset{\text{def}}{\iff} {}^{\forall}\varepsilon > 0,\ {}^{\exists}\delta > 0 \text{ s.t. } d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

最後に先ほど定めた開近傍を用いてこの連続の定義を書き換えるといかのようになる.

連続の定義 3

距離空間 $(X, d_X)(Y, d_Y)$ について. 写像 $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ とする.

$$f \text{ が点 } a \text{ で連続} \overset{\text{def}}{\iff} {}^{\forall}\varepsilon > 0,\ {}^{\exists}\delta > 0 \text{ s.t. } f(B_X(a; \delta)) \subset B_Y(f(a); \varepsilon)$$

次にこの連続の書き換えの後に開集合を用いた同値命題を紹介します.
ページの都合上 1 つしか紹介できませんがぜひぜひ読んでみてください.

5　連続の同値命題

命題

距離空間 $(X, d_X)(Y, d_Y)$ について, 写像 $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ とする.
このとき (1) $\iff$ (2) が成り立つ.

(1) f が連続である. つまり

$${}^{\forall}\varepsilon > 0,\ {}^{\forall}x \in X\ {}^{\exists}\delta > 0 \text{ s.t. } f(B(x; \delta)) \subset B(f(x); \varepsilon)$$

(2) O を Y の任意の開集合とする. このとき $f^{-1}(O)$ が X の開集合となる.

$\because$
$((1) \Longrightarrow (2))$
O を Y の開集合とする. このとき $f^{-1}(O)$ が X の開集合であることを示したい.

$$\text{つまり}^{\forall}x \in f^{-1}(O), {}^{\exists}\delta > 0 \,\text{s.t.}\, B(x;\delta) \subset f^{-1}(O) \text{ を示せばよい.}$$

${}^{\forall}x \in f^{-1}(O)$ とする. つまり $f(x) \in O$ であり, O は Y の開集合 なので

$${}^{\exists}\varepsilon > 0 \,\text{s.t.}\, B(x;\varepsilon) \subset O$$

また (1) より $\delta > 0\, s.t.\, f(B(x;\delta)) \subset B(f(x);\varepsilon) \subset O$ であるとわかる.
つまり $f(B(x;\delta)) \subset O \iff B(x;\delta) \subset f^{-1}(O)$ となる.
以上より $f^{-1}(O)$ が X の開集合であると示せた. よって (2) が成立するとわかる.
$((2) \iff (1))$
示したいことは

$${}^{\forall}\varepsilon > 0 \; {}^{\forall}x \in X \; {}^{\exists}\delta > 0 \,\text{s.t.}\, f(B(x;\delta)) \subset B(f(x);\varepsilon)$$

まず ${}^{\forall}f(x) \in Y, {}^{\forall}\varepsilon > 0, B(f(x);\varepsilon)$ であることがわかる. 次に (2) より $f^{-1}(B(f(x);\varepsilon))$ が X の開集合であり $x \in f^{-1}(B(f(x);\varepsilon))$ であるとわかる. つまり

$${}^{\exists}\delta > 0 \,\text{s.t.}\, B(x;\delta) \subset f^{-1}(B(f(x);\varepsilon)) \iff f(B(x;\delta)) \subset B(f(x);\varepsilon)$$

よって成立する.
以上より (1) $\iff$ (2) である.

□

最後に距離空間の概念の一つであるコンパクトについて紹介し, 連続の応用まで紹介してこの資料を終わります.

6　コンパクトと連続

6.1　コンパクトの定義

被覆の定義

集合 X, $A \subset X$, X の部分集合族 $\mathcal{U}$ について (つまり $\mathcal{U} \subset \mathscr{P}(X)$)

$$A \subset \bigcup \mathcal{U}$$

を満たすとき, A を被覆するといい, $\mathcal{U}$ を A の被覆という.
次に, A の被覆 $\mathcal{U}$ の部分集合 $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ に対しても

$$A \subset \bigcup \mathcal{U}'$$

を満たすとき $\mathcal{U}'$ を $\mathcal{U}$ の部分被覆という.
開集合による被覆のことを開被覆という.

コンパクトの定義

集合 X と X の任意の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対し
(U_λ は開集合) このとき以下を定義する.

$$X \text{ がコンパクト} \overset{\text{def}}{\iff} \text{任意の開被覆 } \mathcal{U} \text{ から有限個選んだ被覆 } \mathcal{U}' \text{ で}$$
$$X = \bigcup \mathcal{U}' \text{ となるように選ぶことができる.}$$

コンパクト性の保存

集合 X をコンパクトとする. また連続写像 $f : X \to Y$ とする.
このとき $A \subset X$ について

$$A \text{ がコンパクト} \Longrightarrow f(A) \text{ もコンパクト}$$

が成り立つ.

$\because$
$\mathcal{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $f(A)$ の開被覆とする. つまり $f(A) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ である.
また f が連続写像であることを利用し次の開被覆を定義する

$$f^{-1}(\mathcal{U}) = \{f^{-1}(U_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$$

定め方よりこれは X における A の開被覆であるとわかる.
つまり $f^{-1}(U_\lambda)$ は X の開集合 であり, 次もいえる.

$$\begin{aligned}
\bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(U_\lambda) &= f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\right) && (\text{像の性質より})\\
&\supset f^{-1}(f(A)) && (\text{上の仮定より})\\
&\supset A && (\text{逆像の性質より})
\end{aligned}$$

よって $A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(U_\lambda)$ である.
仮定より A はコンパクトなので

$$^{\exists}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \text{ s.t. } f^{-1}(U_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_{\lambda_n}) \supset A$$

がいえる. 以上より

$$U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n} \supset f(A)$$

となるので有限部分被覆が存在するとわかるので $f(A)$ はコンパクトである.

□

参考文献

内田 伏一著『集合と位相』(裳華房)

～解析班～

3年　柳 涼空 佐藤 圭一
2年　原田 好輔 味元 翔平

ゼミ班紹介

こんにちは！僕たち解析班は3年生２人と、２年生２人の男４人で数ヵ月間活動してきました。班長は柳なので「柳班」と呼ばれてることがほぼ、というか「柳班」としか呼ばれてないと思うんですけど、実は「佐藤研」という別名も存在しているんですよ。活動初日に介護体験で行けなくて休んで、次週来たら何故か班のノートの表紙にでかでかと書かれてただけなんですけどね。そんな佐藤研のメンバーを私佐藤から独断＆偏見で５段階で評価しつつ紹介していきたいと思います。

【柳涼空】この班のトップ。長。権力者。数研の中では数少ない電電出身の出来るやつ。彼とは２年生の時から同じ班で活動してきたけど、一番印象に残ってるのって正直数学とかじゃなくて合宿のレクのドッチボールなんだよね。めちゃくちゃ速い。ヒソカみたいにバンジーガム使えなきゃ捕れない。
≪評価≫数学５、ラーメン５、字の綺麗さ５、睡魔１、肩５、電電実験５

【原田好輔】この班の真面目担当。多分だけど１回も寝坊せずに全出席してる。普通にすごい。１限なのに。それとわからない数学の問題を俺とかじゃなくて萩原に聞ける正しい判断ができる子。有望な後輩だよ君は。
≪評価≫数学５、黒縁メガネ５、字の綺麗さ３、教職５、チェック柄シャツ４

【味元翔平】この班のムードメーカー。最初はあじもとで覚えてた。みんなでご飯行った時話してた各所への小言がまあ面白い。また色々聞きたいな。コミュ力あるし長い物に巻かれるのが上手そう（褒めてる）。
≪評価≫数学２、香川５、小言５、睡魔１、塾講４

【佐藤圭一】この班の副班長。２、３年生でどっちも解析班だったけど、研究室選びでは第一志望で統計を選びました。統計楽しいです。
≪評価≫☆割愛☆

いかがでしたでしょうか。中々楽しいメンバーでやれて良かった。それでは本題、僕たちの TeX をどうぞご覧くださいませ！

$\mathfrak{p}_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} \chi_\lambda \to \chi_\lambda,\ \mathfrak{p}_\lambda(\boldsymbol{x}) = x_\lambda \longleftarrow$ 積を外す写像 (consome)

平面上の線積分

xy 平面 $\mathbb{R}^2$ 内の曲線 C を考える.
ここで $f(x,y)$ 上の線積分 $\int_C f(x,y)dx$, $\int_C f(x,y)dy$ というものを定義しておく.
まず, $\int_C f(x,y)dx$ に関して x 軸との関係を考えて 3 つの場合に分ける.

(1)C 上の点が始点から終点に移動する間に x 座標が増加する.
$x_L = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = x_R$ として, 小区間 $[x_{i-1}\ ,\ x_i]$ の中に $(\xi_i\ ,\ \eta_i)$ をおく.関数 $f(x,y)$ のリーマン和をとる.
$K(\Delta\ ,\ \xi_i\ ,\ \eta_i,\ f) = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i\ ,\ \eta_i)(x_i - x_{i-1})$,
$|\Delta| = \max\{x_i - x_{i-1}\}$ が限りなく 0 に近づくとき, このリーマン和が Δ や $(\xi_i\ ,\ \eta_i)$ の取り方によらず, 一定の値に収束するとき線積分可能で, その極限を $\int_C f(x,y)dx$ と表し, これを線積分という.

(2)C 上の点が始点から終点に移動する間に x 座標が減少する.
この場合では C の向きを逆にした曲線 $-C$ を考えると, $-C$ は (1) に該当するので, $\int_C f(x,y)dx = -\int_C f(x,y)dx$ により, $f(x,y)$ の C 上の x に関する線積分を定義する.

(3) 一般の場合
C をいくつかの部分に分けると, 各部分では (1) か (2) の状態になっているようにできる.そこでこの C の分割を, $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_l$ と表すとき, $f(x,y)$ の C 上の x に関する線積分は, $\int_C f(x,y)dx = \sum_{i=1}^{l} \int_{C_i} f(x,y)dx$ により定められる.

定義

C 上の点が始点から終点まで移動するにつれて, その y 座標が単調に増加する場合には, C を y 軸に射影したときの下端の点の y 座標を y_D, 上端の点の y 座標を y_U とおく.
このとき区間 $[y_D, y_U]$ を分割し,
$\Delta : y_D = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = y_U$
とし, 各小区間 $[y_{j-1}, y_j]$ 内に 1 点 η_j を取り, η_j を y 座標とする C 上の点を (ξ_j, η_j) としてリーマン和
$K'(\delta', (\xi_j, \eta_j); j) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j, \eta_j)(y_j - y_{j-1}) \cdots (1)$
を作る. これが $|\delta| \to 0$ の時, δ' や (ξ_j, η_j) の取り方によらず 一定の値に収束するならば, $f(x, y)$ は C 上の y に関して線積分可能であるといい, その極限を
$\int_C f(x, y)dx \ \cdots (2)$
であるのである. (2) の式を $f(x, y)$ の C 上の y に関する線積分と呼ぶ.
C 上の点が始点から終点まで移動するにつれてその y 座標が単調に減少する場合には
リーマン和 (1) の極限値を (-1) 倍した値を $f(x, y)$ の C 上の y に関する線積分と定める.

定理 5.1

曲線 C が区分的になめらかで, $f(x, y)$ が連続であれば, $f(x, y)$ は C 上 x 及び y に関して線積分可能である.

定理 5.2

C を xy 平面内の区分的になめらかな曲線とし, 向きが指定されているとする. $f(x, y)$ を C を含む xy 平面の領域で連続な関数とする. $(x(t), y(t))(t \in [a.b])$ を C の媒介変数表示で C の向きを実現するものとするとき,

$$\int_C f(x, y)dx = \int_a^b f(x(t), y(t))x'(t)dt$$

$$\int_C f(x, y)dy = \int_a^b f(x(t), y(t))y'(t)dt$$

が成り立つ.

証明） x についての線積分の方を示す.

曲線 C が区分的になめらかな時には, C をいくつかの部分に分けて各部分がなめ

らかであるようにできる．C 上の線積分は，定義から，そのように分けた各部分の上の線積分の和として与えられることがわかるので，なめらかな曲線について定理を示せばよい, というわけで，はじめから C はなめらかであるとして考えていくことにする．すると媒介変数表示においては $x(t)$，$y(t)$ が (a,b) 上 C^1 級であるということになる．さらに線積分の定義によると，C をいくつかの部分に分けて，各部分では x が単調に増加するか単調に減少するようにしておく C 上の線積分はそれらの部分の上の線積分の和として与えられる．よってはじめから C の向きに沿って x は単調増加するか単調減少するようになっているとしてよい．

まず，C の向きに沿って x が単調に増加する場合を考える．

リーマン和をつくるときに，x の区間 $[x_L,\ x_R]$ の分割点 $x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n$ を各小区間 $[x_{(i-1)},\ x_i]$ に対応する C 上の点 $(\xi_i,\ \eta_i)$ を用いていた. それらに対してまず, $x_i = x(ti)$ $\cdots$(i) となる媒介変数の $t_0,\ t_1, \cdots, t_m$ が取れる C の向きに沿って x が単調に増加するとしているので, 特に $t_0 = a,\ t_m = b$ と取ることができ, また, $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{(m-1)} < t_m = b \cdots$(ii)　となる．

(ii) は t の区間 $[a,\ b]$ の分割 δ を与えている δ の幅 $|\delta|$ は

$|\delta| = \max_{1\le i\le m} \{t_i - t_{(i-1)}\}$

である. $x(t)$ が連続であることから, (i) により $|t_i - t_{(i-1)}| \to 0$ ならば $|x_i - x_{(i-1)}| \to 0$ となる．したがって特に,

$|\delta| \to 0$ なばらば $|\Delta| \to 0$

が成り立つことに注意しておく.

C 上の点 $(\xi_i,\ \eta_i)$ に対しては $(\xi_i,\ \eta_i) = (x(t_i),\ y(t_i))$ となる媒介変数の値 t_i がただ一つ存在する.

$x_{(i-1)} \le \xi_i \le x_i$ から $t_{(i-1)} \le t_i$ となる.

以上によりリーマン和は $K(\Delta,\ (\xi_i,\ \eta_i);\ f) = \sum_{i=1}^{m}(x(t_i) - x(t_{i-1}))$ と書かれる.

さてここで平均値の定理を使うと

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\tau_i')(t_i - t_{i-1})$$

となる (τ_i') が $t_{i-1} < \tau_i' < t_i$ の範囲に存在することが分かる。

この時点で、リーマン和は

$$K(\Delta, \{(\xi_i,\eta_i)\}; f) = \sum_{i=1}^{m} f(x(\tau_i), y(\tau_i))x'(\tau_i')(\tau_i - \tau_{i-1})$$

となる。この右辺において、τ_i' を τ_i に置き換えたものを K_1 と置く。

K_1 は t を変数とする関数 $f(x(t),y(t))x'(t)$ の $[a,b]$ 上のリーマン和に他ならない。

ところで、$K(\Delta, \{(\xi_i,\eta_i)\}; f)$ と K_1 との差は、$|\delta| \to 0$ のとき 0 に収束する。これは、$x(t)$ がもし C^2 級であれば次のように示すことができる。

τ_i も τ_i' ともに区間 $[t_{i-1}, t_i]$ にあるので

$$|\tau_i - \tau_i'| \leq t_i - t_{i-1} \leq |\delta|$$

が成り立つ。$x'(t)$ は C^1 級なので、平均値の定理より

$$x'(\tau_i) - x'(\tau_i') = x''(\sigma_i)(\tau_i - \tau_{i-1})$$

となる σ_i が存在する。また $x''(t)$ は $[a,b]$ 上連続だから、$[a,b]$ 上で有界である。したがって、ある整数 M_1 により

$$|x'(\tau_i) - x'(\tau_i)| \leq M_1|\tau_i - \tau_i'| \leq M_1|\delta|$$

という評価が得られる。すると、

$$\begin{aligned} |K(\Delta, \{(\xi_i, \eta_i)\}; f) - K_1| &= |\sum_{i=1}^{m} f(x(\tau_i), y(\tau_i))(x'(\tau_i') - x'(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} |f(x(\tau_i), y(\tau_i) M_1 |\delta|(t_i - t_{i-1})| \\ &\leq M_2 M_1 |\delta| \sum_{i=1}^{m} (t_i - t_{i-1}) \\ &= M_2 M_1 (b-a)|\delta| \end{aligned}$$

となる。ここで'M_2 は $f(x(t), y(t))$ が $[a,b]$ 上連続なので、
$|f(x(t), y(t))| \leq M_2$ $(t \in [a,b])$ となる正数をとった。よって $|\delta| \to 0$ のとき $K(\Delta, \{(\xi_i, \eta_i\}; f)$ は線積分 $\int f(x,y)dx$ に収束するが、一方 $K(\Delta, \{(\xi_i, \eta_i)\}; f)$ は K_1 の極限である $\int_a^b f(x(t), y(T)x'(t)dt$ にも収束することになる。

～メモ帳～

確率・統計・伊藤班

1 年生　伊藤 遼太
半田 卓也
松岡 郁也
蓮沼 慧星

1　ゼミ班紹介

1.1　拝啓

$\forall$ 時候の挨拶, 機関誌をお読みの皆様におかれましてはますますご健勝のほどとお喜び申し上げます. さて, 先日は中央大学白門祭にて出店していた数学研究部のほうにお越しいただき, 誠にありがとうございます. は？来てない？お前はここで脱落だ. 帰れ. 閑話休題, マクドナルドハンバーガーで新しくスパチキなるものが販売されました. この機関誌が発行される頃には過去の遺物と化してる気がしますが, まあそんなことはいいんです. おいしいですよねアレ. ２００円だとは思えない. 同じ値段で販売されている江口 (親しみを込めて漢字表記) とは比べ物になりません. というか月見バーガー然り, マクドナルドのハンバーガーで卵が入ってるやつって基本的においしくないですよね. あれをおいしいっていうやつは大体きのこの山が好きだし, あんこは粒あん派の人間です (偏見). このような人を日本語ではゲテモノ食いといいます (言いません). おいしくないといえばあれ, 時々期間限定のナゲットのソースが売り出されますが, あれのサワークリームオニオン. そう, それですよ. 通常、サワークリームといえばプリングルス等のポテトチップスで有名なフレーバーですよね. サワークリームの特徴である酸味, 旨味, コク, が調和した大変おいしいものです. そんな味のナゲットのソースが出たんですから, そりゃもう期待に胸を膨らませてマクドナルドに行ったわけです. マクドナルドにつきまして, まあせっかくのサワークリームオニオンなので, どうせならポテトで食べよう!と思い,L サイズのポテトと, 同時発売されていたカレーソースとともに購入. いざ実食. 楽しみは後にとっておく派なので, 先にカレーソースのほうを食べます. 長めのポテト (揚げたて. 神!) を手に 2,3 本とり, ソースをたっぷりつけていただきます. $\cdots$ 普通のカレーでした. うん. いや, おいしいんですけど, 思ってよりガチでただのカレーでした. まあカレー頼んでカレー出てきたんですから, 問題はないわけです. 次は—まあこれで最後なんですけど—本日のメインディッシュ, サワークリームオニオンです. もう期待で胸が。っぱいです. カレーソースが普通だったのでこっちはもう天国にでも上るほどおいしいのでしょう. 先ほどと同様, たっぷりいただきます. $\cdots$ これは何でしょうか. 酸味とコクがけんかしている $\cdots$. おいしくない. どうしてこうなってしまったんだ. 担当者は本当にこれがおいしいと思って企画を通したのか. 私は何のた

1 年生おもしろいわー、２年ともっと交流しましょー!!←こいつは２年。。（東京の田舎にいる人）

めにここまで時間をかけてきたんだ?(自宅から 5 分) この野郎, 私はマックに騙された. ここがアメリカだったら私は訴訟を起こしている. 結論, 今までのナゲットソースの中で 2 番目においしくなかったです. 一番おいしくないのはバーベキューソースです. バーベキューソースを頼むやつは前述のきのこ/粒あんキチと同じ部類の人間です. サワークリームオニオンがおいしくなかったのでトボトボ帰りました. 途中にある次郎インスパイアよっちゃった. ヤサイアブラニンニクマシマシカラメニクマシ. 最高.Yeah. 末筆ながら, 機関誌をお読みの皆様のより一層のご活躍を心よりお祈りいたしております. くれぐれもご自愛くださいませ。

敬具

2 確率

2.1 確率

測度論による確率の定義

定義 1-1

写像 $\mathrm{P} : F \longrightarrow \mathbb{R}$ が以下の 3 条件を満たすとき, P を (Ω, F) 上の**確率測度**であるという.
(1)$\forall \mathrm{A} \in F, \mathrm{P}(\mathrm{A}) \leqq 0$
(2)$\mathrm{P}(\Omega) = 1$
(3)$A_1, A_2, ...$が F のお互いに排反な事象 ($i \neq j$ ならば $A_i \cap A_j = \phi$) ならば,

$$\mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{A_i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(\mathrm{A}_i)$$

定義 1-2

集合Ω, 事象空間 F, (Ω, F) 上の確率測度 P を組とした (Ω, F, P) を**確率空間**という.

すなわち, 上記 (1)(2)(3) を満たす関数 P を確率と定義するわけである. (無限個の事象の) 加法定理が定義となっている所に注意しよう.

わかりづらいので, これらの定義から具体的に確率測度を構成する例をみてみよう.

例 1-1 Ω を集合とし, $\mathrm{A} \neq \phi$ を Ω の真部分集合とする.
事象空間 $F = \{\phi, \mathrm{A}, \mathrm{A^c}, \Omega\}$ ならば, (Ω, F) 上の任意の確率測度は, $0 \leq p \leq 1$ を満たす実数 p に対して以下の形で表される：

$$\mathrm{P}(\phi) = 0, \mathrm{P}(\mathrm{A}) = p, \mathrm{P}(\mathrm{A^c}) = 1 - p, \mathrm{P}(\Omega) = 1.$$

例 1-2 Ω を N 個の標本点 (有限個) からなる標本空間$\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_N\}$ とし, F をΩの冪集合としたとき, 以下で表される関数 P は明らかに, (Ω, F) 上の確率測度である：

$$^{\forall}\mathrm{A} \in F, \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{1}{N}|\mathrm{A}|,$$

ただし $|\mathrm{A}|$ は A の濃度 (要素の個数) である.

例 1-2 では, ある関数を利用して, それが確率測度であることを表した. 次の例は同じように書かれているように見えて, 確率測度を具体的に示したものである.

例 1-3 $\Omega = \{w_1, w, \ldots, w_N\}$ で, すべての i, j に対して $\mathrm{P}(\{w_i\}) = \mathrm{P}(\{w_j\})$ とする.
このとき,$^{\forall} w \in \Omega, \mathrm{P}(\{w\}) = \frac{1}{N}$である.さらに, $^{\forall}\mathrm{A} \subset \Omega, \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{|\mathrm{A}|}{N}$ である.

以上の例から確率を測度論による定義から始めても, 高校数学の定義と以降は変わらないことがわかる.
実際に確率測度の定義を用いて, 例題を証明しよう.

問 1

A, B という人がじゃんけんをする. ただし, A, B はグー, チョキ, パー を等確率で出すものとする. 「じゃんけんに決着がつき」A が勝つ確率は$\frac{1}{2}$ である.

証明

$$\{ \text{ じゃんけんの決着がつき } A \text{ が勝つ } \} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{ n \text{ 回目で決着がつき } A \text{ が勝つ } \}$$

となる.,

$$A_n := \{ n \text{ 回目で決着がつき } A \text{ が勝つ } \}$$

とすると排反事象列である. よって

$$\mathrm{P}(\text{じゃんけんの決着がつき } A \text{ が勝つ}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$$

となる.

$$\mathrm{P}(A_n) = P(n-1 \text{ 回目まで決着がつかず } n \text{ 回目で決着がつく}) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3^n}$$

であるので

$$\mathrm{P}(\text{じゃんけんの決着がつき } A \text{ が勝つ}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \frac{1-\dfrac{1}{3^n}}{1-\dfrac{1}{3}} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(n \text{ 回目までに決着がつき } A \text{ が勝つ})$$

$$= \frac{1}{2}$$

□

2.2 条件付き確率

事象 B が起こることがわかっているときに事象 A も起こる確率のことを, B が与えられた下での A の条件付き確率といい

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})$$

と書く. 定義より, $\mathrm{P}(\mathrm{B}) \neq 0$ の時のみ考える. 条件付き確率は以下で与えられる.

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}$$

これらを数学的に扱うには, 条件付き確率が「確率」であるかどうかを確認しなければならない. 従って, 以下の定理を示す必要がある.

定理 2-1

$B \in \mathcal{F}, \mathrm{P}(\mathrm{B}) > 0$ とする. $\mathcal{Q} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ を　$\mathcal{Q} = \mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})$ で定義すると, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{Q})$ は確率空間となる.

証明

$\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) \geq 0$ より, $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} \geq 0$. また, $\mathrm{P}(\Omega|\mathrm{B}) = \dfrac{\mathrm{P}(\Omega\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} = 1$
さらに, $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots$ が互いに排反であるとき, $\mathrm{A}_1\cap\mathrm{B}, \mathrm{A}_2\cap\mathrm{B}, \ldots$ も互いに排反であるため,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\cup\cdots|\mathrm{B}) &= \frac{\mathrm{P}((\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2\cap\cdots)\cup\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} \\
&= \frac{\mathrm{P}((\mathrm{A}_1\cap\mathrm{B})\cup(\mathrm{A}_2\cap\mathrm{B})\cup\cdots}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} \\
&= \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} + \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}_2\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} + \cdots \\
&= \mathrm{P}(\mathrm{A}_1|\mathrm{B}) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_2|\mathrm{B}) + \cdots
\end{aligned}$$

となる. これは前述の確率空間の定義をすべて満たす.

□

条件付き確率より, 以下のような式が導かれる.

例 2-1

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A})$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})$$

上記の式は条件付き確率の定義より明らかである.

いくつか例題を解いてみよう.

問 2-1

$(\Omega, \mathcal{Q}, \mathcal{F})$ は確率空間で, 事象 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ は事象とする. $\mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\mathrm{C}) > 0$ であれば,

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}\cap\mathrm{C})\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{C})\mathrm{P}(\mathrm{C})$$

が成り立つことを示せ.

解答

例 2-1 より $\mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\mathrm{C}) > 0$, また $\mathrm{P}(\mathrm{C}) > 0$ であるため,

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C}) &= \mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}\cap\mathrm{C}) \\
&= \mathrm{P}(\mathrm{C})\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{C})\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}\cap\mathrm{C}) = (\text{右辺})
\end{aligned}$$

が成立する.

□

問 2-2

$\mathrm{P(A)} > 0, \mathrm{P(B)} > 0$ ならば,

$$\mathrm{P(B|A)} = \mathrm{P(A|B)}\frac{\mathrm{P(B)}}{\mathrm{P(A)}}$$

であることを示せ.

解答

例 2-1 より

$$\begin{aligned}\mathrm{P(A} \cap \mathrm{B)} &= \mathrm{P(A)P(B|A)} \\ &= \mathrm{P(B)P(A|B)}\end{aligned}$$

が成立. 従って,

$$\mathrm{P(A)P(B|A)} = \mathrm{P(B)P(A|B)}$$

とできる. $\mathrm{P(A)} > 0, \mathrm{P(B)} > 0$ であることから, 両辺を $\mathrm{P(A)}$ で割ると, 題意の式が得られる.

□

この問いから,

$$\mathrm{P(A|B)} = \mathrm{P(B|A)}\frac{\mathrm{P(A)}}{\mathrm{P(B)}}$$

も簡単に導けることがわかる.

2.3 独立性

2 つの事象 A と B が互いに関係しないことを, A と B は独立であるという.

定義 3-1

空でない事象 A , B に対し

$$P(A|B) = P(A)$$

が成り立つとき, A と B は独立であるという.

上記が成り立つとき, A と B を入れ替えても同じことが成り立つ.

定理 3-2

空でない事象 A, B に対し

$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$$

証明. 定義より, $P(A|B) = P(A)$ が成り立つとき, A と B を入れ替えても同じことが成り立つので,

$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$$

□

また, 条件付き確率の定義から以下が成り立つ.

定理 3-3

$$A \text{ と } B \text{ が独立} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

証明. 条件付き確率の定義より,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

よって, A と B が独立 $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

□

定義 3-4

事象 A_i, (i = 1, 2, ...) が独立であるとは, I = {1, 2, ...} の任意の有限部分集合 J に対して

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{j\in \mathrm{J}} \mathrm{A}_j\right) = \mathrm{P}\left(\prod_{j\in \mathrm{J}} \mathrm{A}_j\right)$$

が成り立つ場合をいう.

定義 3-5

A_i, (i=1, 2,...) に対して. $\mathrm{P}(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_i)\mathrm{P}(\mathrm{A}_j)$ が全ての i, j について成り立つとき, A_i は対ごとに独立であるという.

よって, A, B, C という 3 つの事象が独立である必要十分条件は次の 4 つの式が成り立つことである.

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{C}), \qquad \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B}),$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{C}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{C}), \qquad \mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\mathrm{C}) = \mathrm{P}(\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{C}).$$

問 3-1

n 人の集団中に同じ誕生日の人が少なくとも 2 人いる確率を求めよ.

解答. 誰も同じ誕生日がいないときの余事象を取ればいい. よって, 求める確率は,

$$1 - \frac{{}_{365}\mathrm{P}_n}{365^n}$$

□

問 3-2

トランプ 1 組 52 枚のカードがある. ここからランダムに 5 枚引いたとき, 「フルハウス」となる確率はいくつか. (フルハウスは, 同じ数字が 3 枚 + 同じ数字が 2 枚の組み合わせである.)

解答. 52 枚のカードから 5 枚のカードを選ぶ組み合わせの総数は,

$${}_{52}\mathrm{C}_5 = \frac{{}_{52}\mathrm{P}_5}{5!} = 2,598,960 \text{ 通り}.$$

同じ数字 3 枚を選ぶ組み合わせは 13 通りで, マークの組み合わせは 4 通り.

よって, スリーカードの部分の組み合わせの総数は, $13 \times 4 = 52$ 通り.

同じ数字 2 枚を選ぶ組み合わせは先程と同様に 13 通りある.

しかし, 先に考えた 3 枚と同じ数字が含まれてはいけない為, 12 通りと考える.

それから, 4 種類のマークから 2 つを選ぶことになるので, マークの組み合わせは, ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 通り.

よって, ワンペアの部分の組み合わせの総数は, $12 \times 6 = 72$ 通り.

スリーカード 1 パターンにつき, ワンペアは 72 通りあるので, フルハウスの組み合わせの総数は, $52 \times 72 = 3,744$ 通り.

したがって, 求める確率は,

$$3,744 \times \frac{1}{2,598,960} \times 100 \fallingdotseq 0.144\%$$

□

2.4 期待値

公正なサイコロでは, “平均的”に以下の値が出ると考えられる:

$$1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$$

同様に離散確率変数 X について期待値あるいは平均を定義する.

定義 4.1

離散確率変数 X に対し, 右辺が有限の場合, 以下により X の期待値を定義する:

$$E(X) = \mu = \sum_{x \in \mathbb{R}} x f_X(x).$$

ただし, 右辺の和が絶対収束するときに限る (加える順番関わり無く同じ値にならない). 期待値は μ と書かれることもある.

同様にして, 離散確率変数 X に対して任意の実数値関数 g によって作られる新たな変数 Y=g(X) も離散確率変数となる. Y の確率関数を $f'(y)$ とおくと, Y の期待値は定義により

$$E(X) = \sum_{y \in \mathbb{R}} y f'(y)$$

により計算される. しかし, 次の定理により Y の確率関数を求めなくても Y の期待値を求められる.

定理 4.2

$X : S \to \mathbb{R}$ は任意の離散型確率変数であり $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ならば,

$$E(g(\mathrm{X})) = \sum_{\mathrm{x}\in\mathbb{R}} g(x) f_X(x).$$

となる. ただし, 右辺の和が絶対収束するときに限る.

証明

$X(S) = \{x_1, ..., x_m\}(x_1 < ... < x_m)$ のとき

$$\begin{aligned} E(g(X)) &= \sum_{s\in S} g(X(s))P(\{s\}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} g(x_i) \sum_{s\in\{X(s)=x_i\}} \mathrm{P}(\{s \in S | x_{i-1} < X(s) < x_i\}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} g(x_i) P(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} g(x_i) f_X(x_i). \end{aligned}$$

□

例題 4.3

2019 年の年末ジャンボ宝くじの期待値を求めよ

まず, 年末ジャンボ宝くじの仕組みについて解説する. 年末ジャンボ宝くじは 1 枚 300 円で販売されており,100000 番〜199999 番の 10 万枚, 組が 001 組〜200 組が 10 万枚の番号× 200 組の組＝ 2,000 万枚が 1 ユニットとして扱われる. ちなみに 2019 年の年末ジャンボは 23 ユニット発売予定である.

当選金額は以下のとおりである.

1 等	700,000,000 円	23 本
1 等の前後賞	150,000,000 円	46 本
1 等の組違い賞	100,000 円	4,577 本
2 等	10,000,000 円	69 本
3 等	1,000,000 円	2,300 本
4 等	100,000 円	46,000 本
5 等	10,000 円	920,000 本
6 等	3,000 円	4,600,000 本
7 等	300 円	46,000,000 本
年末ラッキー賞	20,000 円	46,000 本

よって期待値を求めると、

$$\frac{1}{2\times\ 10^7}\times\ 7\times\ 10^8+\frac{1}{10^7}\times\ 1.5\times\ 10^8+\frac{199}{2\times\ 10^7}\times\ 10^5+\frac{3}{2\times\ 10^7}\times\ 10^7+\frac{1}{2\times\ 10^5}$$
$$\times\ 10^6+\frac{1}{10^4}\times\ 10^5+\frac{1}{500}\times\ 10^4+\frac{1}{100}\times\ 3000+\frac{1}{10}\times\ 300+\frac{1}{10^4}\times\ 20000=149.495$$

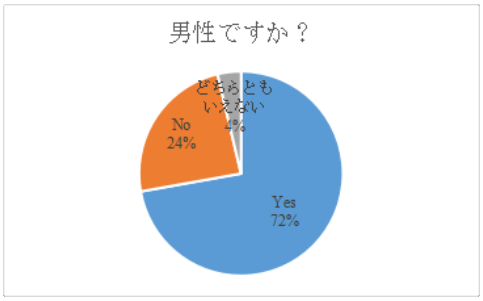
と求められ, 期待値は 149.495 円となる.

参考文献

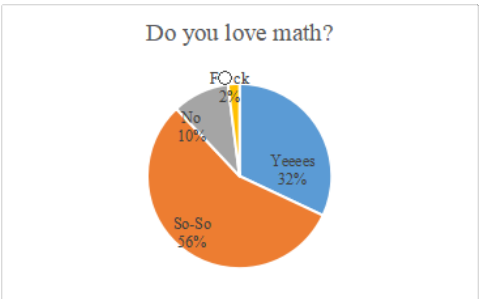
酒折　文武 『離散数学 2』

Column Part2 【色々円グラフ】

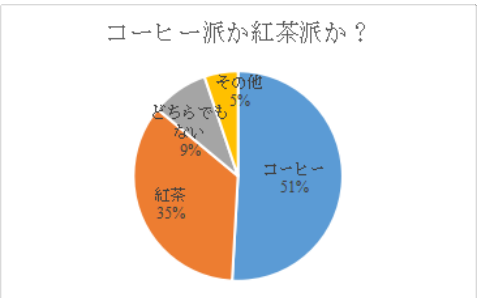
数研部員のデータを円グラフにまとめました.



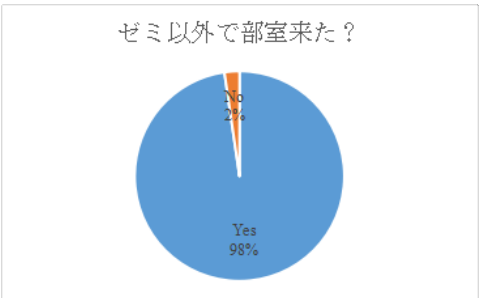
数研にも性の多様性の時代の波が押し寄せてますね.(適当)
男性じゃない方の割合は若干減ったみたいです.



集計中いきなり「F ○ ck」が出てきてツボりました.
彼に一体何が · · ·



因みに質問を無視した回答 (その他) にはカルピス, コーラ, お茶とそれぞれ書いてありました.
よっぽど好きなんですね.



驚異の 98%!! 去年と比べても圧倒的な数字です.

選択肢を勝手に作って勝手に丸してあったりして, 皆さんのアンケートに対する熱意を感じました.(機関誌担当)

確率・統計・井上班

3 年　井上 明俊 岡田 浩昭
2 年　五井渕 巧 鈴木 由依
信国 爽香 大八木 宥妃

1. ゼミ紹介

おすすめのディズニーシーのまわり方 (計 3 万歩)
7:00 舞浜駅到着
8:00 開園
ソアリン:ファンタスティック・フライト ファストパス取得 (現在は開園 20 分で発行終了しちゃうから気を付けてね)
カチューシャ購入
インディ・ジョーンズ・アドベンチャー : クリスタルスカルの魔宮フライト（60 分待ち)
昼食 スパイシースモークチキンレッグとスパークリングタピオカドリンク（マンゴー味）
ニモ＆フレンズ・シーライダー ファストパス取得

– – –アラビアンコーストへ移動 – ––

マジックランプシアター
キャラバンカルーセル
ミッキーとミニーのアイスバー

– – –マーメイドラグーンへ移動 – ––

海底 2 万マイル ファストパス取得
アリエルのプレイグラウンド
ニモ＆フレンズ・シーライダー
アクアトピア

– – –アメリカンウォーターフロントへ移動 – ––

ダッフィーの家の前で写真撮影

ポップコーンを食べる（ガーリックシュリンプ味）
–タワテラを眺めながら–
チーズ＆ペッパー・チュロスとファンタスティック・フライト・チュロス（パイナップル味）
イジングスピリッツのファストパス取得
フォートレス・エクスプロレーション・レオナルドチャレンジ・
2
ユカタンソーセージドッグ
ソアリン：ファンタスティック・フライト

– – –マーメイドラグーンへ移動 再び – ––

ジャンピングジェリーフィッシュ
夜景を楽しむ
海底 2 万マイル
レイジングスピリッツ

– – –アラビアンコーストへ移動 再び – ––

カスバ・フードコートのビーフカリーとチキンカリー
シンドバッド・ストーリーブック・ヴォヤッジ
お土産購入
地球儀の前で写真撮影
21:00 退園

2. 導入

私たちの班は統計の正規分布についてまとめました.

正規分布

正規分布は、統計資料をいくつかの階級に分けたときその平均値の度数を中心に正負の値の度数が同程度に広がる分布です.

二項分布だろうと幾何分布, あるいはポアソン分布でも n を ∞ に近づけるとすべて正規分布に従います.

正規分布 (ガウス分布) の確率密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ \frac{-1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\}$$
$$-\infty < x < \infty$$

期待値

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ \frac{-1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left\{ \frac{-1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\} dx \end{aligned}$$

ここで

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

とする.

$$x = \sigma y + \mu$$
$$dx = \sigma dy$$

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma y + \mu) \exp\left\{ \frac{-y^2}{2} \sigma \right\} dy \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y \exp\left\{ \frac{-y^2}{2} \right\} dy + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ \frac{-y^2}{2} \right\} dy \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[-\exp\left\{ \frac{-y^2}{2} \right\} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} \\ &= 0 + \mu \\ &= \mu \end{aligned}$$

分散

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\} dx \end{aligned}$$

ここで $y = x - \mu$ とすると, $x = y + \mu,\ dx = dy$ であるから,

$$\begin{aligned}
V(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 \exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right\} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} -y\sigma^2\left(-\frac{y}{\sigma^2}\right)\exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right\} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} -y\sigma^2\left(\exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right\}\right)' dy \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} -y\left(\exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right\}\right)' dy \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left[-y\left(\exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right\}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right\} dy \\
&= 0 + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi\sigma^2} \\
&= \sigma^2
\end{aligned}$$

従って, $V(X) = \sigma^2$

モーメント母関数

$$\begin{aligned}
Mx(t) &= E(\exp\{tx\}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\exp\{tx\}f(x)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma}\exp\left\{tx - \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} dx
\end{aligned}$$

ここで $y = \dfrac{x-\mu}{\sigma} - \sigma t$ とすると, $x = \sigma y + \sigma^2 t + \mu,\ dx = \sigma dy$ であるから,

$$\begin{aligned}
Mx(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma}\exp\left\{t(\sigma y + \sigma^2 t + \mu) - \frac{(y+\sigma t)^2}{2}\right\}\sigma dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\sigma ty + \sigma^2 t^2 + \mu t - \frac{y^2}{2} - \sigma ty - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 - \frac{y^2}{2}\right\} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\}\sqrt{2\pi} \\
&= \exp\left\{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\}
\end{aligned}$$

従って, $Mx(t) = \exp\left\{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\}$

確率変数 X が正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ に従うとき線形変換を考える.

$$a = \frac{1}{\sigma} \quad , \quad b = -\frac{\mu}{\sigma}$$

とおけばよい.

以上の a および b において元の確率変数 X から平均 μ を引き, その値をさらに標準偏差 σ で割るという線形変換をする.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

変換後の確率変数 Z のことを標準化変数という.

正規変数の線形変換後の確率変数が従う確率分布は,
正規分布 $\mathrm{N}(a\mu+b, a^2\sigma^2)$ であるので a および b を代入することで, Z は正規分布 N(0,1) に従うことがわかる.

この正規分布 N(0,1) を特別に標準正規分布という.

標準正規分布

例　・サイコロを何回も投げたときの出た目の合計の分布
・全国の中学生の男女別の身長分布
・大規模な模試の点数分布

問題　1

あるところに A 町という町があった．その町では物を大切にする心の持ち主が多く, どんなものでも大切に扱い, もし物が壊れても 3R (スリーアール：Reduce(減らす), Reuse(再利用する, Recycle(再資源化する) の頭文字をとった言葉) を必ずといってよいほど遵守していた．

一方, 隣町の B 町では物の扱いが荒い者が多く, 買ったものは数年数か月, ひどい時では数日経過しただけなのに壊してしまうような家庭が大半を占めていた．しかし, もし壊したものが電化製品であった場合長期保証というものが存在し, その商品に記載されている長期保証の期間内だった場合無料で修理・交換が可能であるというものが存在する．もちろんそんな虫のいい話を, 頻繁にものをお釈迦にする彼らが無視するはずがなかったのであった．　物を壊してはその都度交換, 修理を店舗に依頼し, その数は新品を購入する数をも上回る勢いだった．

そんな状況が続いている中, B 町にある家電量販店カワダ電機はあまりにも酷い住人の野蛮さに頭を抱えていた．何故ならこの店舗では, 隣町の A 町にある家電量販店○ックカメラに対抗するために商品の長期保証の期間を○ックカメラと同じ年数にしていたからだ．そのおかげで商品を売っても大半が保証期間内に壊れてしまうため, 新たに商品を買いに来る人の割合が少ないので売り上げがどんどん落ちてしまっていた．このままではカワダ電機 B 町店閉店の危機が迫っているため, 店長は A 町内と B 町内での電化製品の故障年数のデータをそれぞれ確かめてみることにし, 長期保証の期間を縮めることを決意したのだった．

A 町, B 町それぞれの電化製品の故障年数を確率変数 X, Y とすると, X は正規分布 $\mathrm{N}(8, 3^2)$, Y は正規分布 $\mathrm{N}(4, 2^2)$ にそれぞれ従う．この時 A 町, B 町共に長期保証が 5 年である場合, それぞれどれくらいの割合の人が長期保証期間内に故障しているか求めよ．

【解説】

X, Y それぞれを標準化し, 標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1)$ に従う確率変数 Z とする．その後, 標準正規分布表より上側, もしくは下側 z 点を求めることによって, 長期保証内に故障する割合を割り出すことができる．

(確率変数 X の場合)

$\mathrm{P}(X \leqq 5)$ を標準化する．

$$\mathrm{P}(X \leqq 5) = \mathrm{P}\left(\frac{X-8}{3} \leqq \frac{5-8}{3}\right) = \mathrm{P}(Z \leqq -1)$$

標準正規分布表は $\mathrm{P}(Z \geqq z)$ の割合を求める表なので, 正規分布の左右対称性から

$$\mathrm{P}(Z \leqq -1) = \mathrm{P}(Z \leqq 1)$$

と変換することによって求める.

その結果, $\mathrm{P}(Z \leqq -1) = \mathrm{P}(Z \geqq 1) = 0.1587$ となるので, A 町の長期保証期間内での故障の割合がおよそ全体の 15.87% であることが分かった.

(確率変数 Y の場合) 確率変数 X のときと同じように $\mathrm{P}(Y \leqq 5)$ を標準化する.

$$\mathrm{P}(Y \leqq 5) = \mathrm{P}\left(\frac{Y-4}{2} \leqq \frac{5-4}{2}\right) = \mathrm{P}(Z \leqq 0.5)$$

今回も同じように $\mathrm{P}(Z \leqq z) = \mathrm{P}(Z \geqq z)$ と変換したいが, この変換は $z \leqq 0$ のときの場合のみ可能なので,

$\mathrm{P}(Z \leqq z) = \mathrm{P}(Z \geqq z)$+0.5(この数は標準正規分布の左半分, つまり下側全域のことを指している)

と変換してあげればよい.

その結果, $\mathrm{P}(Z \leqq 0.5) = \mathrm{P}(Z \geqq 0.5) + 0.5 = 0.3085 + 0.5 = 0.8085$ となるので, B 町の長期保証内での故障の割合は全体の約 80.57% となることが分かった.

問題　2

以下の問題において試験の点数 X は正規分布に従っているとする. また, 標準正規分布の上側 2.5% 点は 1.96 とする.

T 少年は ps4 がほしいと親にお願いしたところ今度の数学のテストで上位 2.5% 以内に入れば買ってもらうことが決まった.T 少年は必死に勉強した. そして迎えたテスト当日, 手ごたえもばっちり. 後日答案を受け取るのだった.

数学のテストは 100 点満点で平均点が 57 点, 標準偏差が 15 点であるとする.
(1) T 少年が上位 2.5% 以内に入るには何点以上必要か.
解説
確率変数を X, 求めたい点数を c とすると

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \geq c) &= \mathrm{P}\left(\frac{X-57}{15} \geq \frac{c-57}{15}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{c-57}{15}\right) = 0.025 \end{aligned}$$

ここで, 上側 2.5% 点は 1.96 より

$$\begin{aligned} \frac{c-57}{15} &= 1.96 \\ c-57 &= 1.96 \times 15 \\ c &= 86.4 \end{aligned}$$

従って, 87 点以上で上位 2.5% 以内に入ることが出来る.
無事に ps4 を買ってもらい, 自前で Dead by Daylight を買って満喫する T 少年だったが, 気が付いたら英語のテストの前日となっていた. さすがに補習になったまずいと思い, 一夜漬けで勉強するのだった. 数日後, 英語のテストが返却された.

英語のテストは 100 点満点で平均点が 48 点, 標準偏差が 10 点であるとする. また,T 少年の偏差値は 36 で 24 点以下の人を補習対象とする.
ここで母集団の点数の期待値をμ, 分散を $(\sigma)^2$, 自身の点数を x とすると,

$$\text{偏差値} = \frac{x-\mu}{\sigma} \times 10 + 50$$

と表される.
(2) T 少年は補習を回避できたか.
解説
T 少年の点数を X とし, 公式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{X-48}{10} \times 10 + 50 &= 36 \\ X - 48 + 50 &= 36 \\ X &= 34 \end{aligned}$$

よって補習を回避できた.

確率不等式も無事ピロってます

3 年　古田 旭宏
2 年　上乗 翔也
小宮山 健太
鈴木 あみ
藤原 迅
滝本 千里

～ゼミ紹介～

この統計班のゼミでは, とりあえず二年生がこれから知ることになるであろう「確率不等式」について学んでいた··· がしかし, なぜか途中から, 距離空間の定義から, 距離を用いた連続と開集合を用いた連続性の証明にまで発散してしまった.

統計において, 距離空間を学ぶことは決して無意味ではない. しかし, 確率不等式を学ぶ上で取り上げようとする人は見たことがない. ちなみに,「線形モデル」というこれまた重要な統計学の一つの分野においては,「誤差の考え方が基礎」になる. 最小二乗法という推定の手法が人気だが, 各データにおける誤差と誤差の距離がユークリッド距離 (l_2距離ともいう.) であるときにのみこの手法が通用するのであって, この結果, 代表値として平均値をとれば問題解決となる場合が多い. しかし, マンハッタン距離 (l_1距離ともいう.) による誤差間の最小二乗法では中央値 (メジアン) が, マハラビノス距離 (l_0距離ともいう.) による最小二乗法では最頻値 (モード) が最もデータの誤差を最小にする計算方法であることが多くの (シンプルな仮定の下における) 分布の場合で数学的に立証される. また, カルバック・ライブラー情報量は準距離からくる··· .

とか言ってるとマジで学部生の内容どんどん超えちゃうのでもうやめます.やめたいです.··· 距離については前部長の萩原君に聞いてみるといいと思います. あーもうやめれないフラグ立ってきたー. やばいやばい. 闇を垣間見ることになるよほんと. 某かいまみ本みたいだよこれ. ほんとに終わろまじで. ゼミ班紹介終わり. ほんとのホントに終わっとこ. あ, 一応わかりやすくこれまでのことを表をまとめておく. そして, 今回のゼミの内容は距離のことは一切やりません.(確率不等式に関する内容なので悪しからず.)

距離	最小二乗法による代表値
l_2距離 (ユークリッド距離のこと)	平均値
l_1距離 (マンハッタン距離のこと)	中央値
l_0距離 (マハラビノス距離のこと)	最頻値

1 定義

X を確率変数とし,
確率, 確率密度, 期待値, 分散を次のように定義する.

	離散型	連続型
確率	$\mathrm{P}\left(a \le X < b\right) \overset{\text{def}}{=} \displaystyle\sum_{a \le X < b} f(x)$	$\mathrm{P}\left(a \le X < b\right) \overset{\text{def}}{=} \displaystyle\int_a^b f(x)dx$
確率密度	$f(a) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{P}\left(X = a\right)$	$f(a) \overset{\text{def}}{=} \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left\{\mathrm{P}\left(a \le X < a + h\right)\right\}$ $\neq \quad \mathrm{P}\left(X = a\right) = \displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$
期待値	$\mathrm{E}\left[X\right] \overset{\text{def}}{=} \displaystyle\sum_{-\infty \le X < \infty} xf(x)$	$\mathrm{E}\left[X\right] \overset{\text{def}}{=} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$
分散	$\mathrm{V}\left(X\right) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}\left[\left(X - \mathrm{E}\left[X\right]\right)^2\right]$	

以下, 期待値と分散は定数であることに注意し, $\mathrm{E}\left[X\right] = \mu$, $\mathrm{V}\left(X\right) = \sigma^2$ と書くことにする.

2 確率不等式

マルコフの不等式

$^{\forall}X$: 確率変数, $^{\forall}a > 0$: 正数, $\mathrm{E}[X] < \infty$
$\Longrightarrow \mathrm{P}(|X| > a) \ \le \ \frac{1}{a}\ \mathrm{E}[|X|]$

証)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[|X|] &= \int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{-a} |x|f(x)\,dx \ + \ \int_{-a}^{a} |x|f(x)\,dx \ + \ \int_{a}^{\infty} |x|f(x)\,dx \\ &\ge \int_{-\infty}^{-a} |x|f(x)\,dx \ + \ \int_{a}^{\infty} |x|f(x)\,dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \int_{-\infty}^{-a} af(x)\,dx \ + \ \int_{a}^{\infty} af(x)\,dx \\
&= \ a\mathrm{P}(X \leq -a) \ + \ a\mathrm{P}(X > a) \\
&= \ a\mathrm{P}(|X| > a)
\end{aligned}
$$

□

マルコフにおいて, $a \to a^2$, $X \to (X-\mu)^2$とおく.
このとき, $\mathrm{P}(|X-\mu| \geq a) \leq \frac{\mathrm{V}(X)}{a^2}$ となる.

チェビシェフの不等式

X : 確率変数, $\mathrm{E}[X] < \infty$, $\mathrm{V}[X] < \infty$
$^{\forall}\varepsilon > 0$ に対して, 次が成り立つ
$\mathrm{P}(|X - E[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{V}(X)}{\varepsilon^2}$

特に,
$\mathrm{P}(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$
の形が有名.
また,
$\mathrm{P}(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$
は $\varepsilon - N$ 論法と確率不等式の重要な接続部となる定理である.

3 収束

確率収束

$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$: 確率変数列が, X : 確率変数に確率収束する.
$\iff$ $^{\forall}\varepsilon > 0$ に対して,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$$

または

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

が成り立つ.

他に, 収束の種類をあげておく.

平均収束

各 X_n と X に対して, r 次のモーメント $\mathrm{E}[X^r]$ が存在すると仮定する.
この上で, $\{X_n\}$ が X に平均収束する. (r が平均収束する)

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}[|X_n - X|^r] = 0$$

が成り立つ.

$|X_n - X|^r$という 1 つの確率変数に対して, 期待値 E をとる.
それは n の式なので, $n \to +\infty$ とするとき, 0 に収束することが平均収束ということ.

命題

平均収束 $\Rightarrow$ 確率収束 (マルコフの不等式を使用)

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) &= \mathrm{P}(|X_n - X|^r \geq \varepsilon^r) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^r}\mathrm{E}[|X_n - X|^r] \to 0 (n \to +\infty)\end{aligned}$$

仮定の $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}[|X_n - X|^r] = 0$ より

$$\therefore \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

—逆の反例—
$^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して, X_nが次のような確率をとる. (離散型とする)

$$\begin{cases} \mathrm{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n} \\ \mathrm{P}(X_n = n) = \frac{1}{n} \end{cases}$$

この時, 確率収束はするが, 平均収束はしない.

$$\left(\begin{array}{l} \text{また, 確率変数列 } \{X_n\} \text{ の確率収束極限 } X \text{ は} \\ \qquad\qquad X = 0 \text{ であることに注意する.} \end{array}\right)$$

4　大数の弱法則

大数の弱法則

$X_1, \ldots, X_n$: 独立
$X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{F}(\theta)$
このとき,

$$\mathrm{E}\left[x_i^2\right] < \infty \Longrightarrow \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{に対して,}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{P}\left(|\overline{X} - \mathrm{E}\left[x_i\right]| \geq \varepsilon\right) = 0 \quad \text{が成り立つ.}$$

証)
$\mathrm{E}\left[\overline{X}\right] = \mu,\ \mathrm{V}\left(\overline{X}\right) = \dfrac{\sigma^2}{n}$
だから, チェビシェフの不等式で$\overline{X}$について適用すると,
$^{\forall}\varepsilon > 0$ に対して,

$$\mathrm{P}\left(|\overline{X} - \mathrm{E}\left[x_i\right]| \geq \varepsilon\right) \iff \mathrm{P}\left(|\overline{X} - \mu| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$$

$$\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty)$$

$$\therefore \lim_{x \to +\infty} \mathrm{P}\left(|\overline{X} - \mu| \geq \varepsilon\right) = 0 \qquad \square$$

5　イェンセンの不等式

イェンセンの不等式

X : 確率変数, $h(x)$: X の値域を含む区間 I 上で凸関数を成す, とする.
$\mathrm{E}\left[X\right]$, $\mathrm{E}\left[h(X)\right]$ が存在する.

$$\Longrightarrow \mathrm{E}\left[h(X)\right] \geq h(\mathrm{E}\left[X\right])$$

が成り立つ.

特に, 狭義凸関数のときは, 等号成立は 1 点のときに限る.

エベレストが発見される前に世界で一番高い山はエベレストだったらしい。（まちカド難民）

定義 (凸関数)

$h(x)$ が I 上で凸関数である.

$$\iff {}^{\forall}c \in (0,1),\ {}^{\forall}x_1, x_2 \in I \text{ に対して,}$$

$$h\left(cx_1 + (1-c)x_2\right) \leq ch(x_1) + (1-c)h(x_2)$$

が成り立つこと.

凸関数は微分可能でなくてもよい.
しかし, I 上で 2 階微分可能ならば, 凸関数は次のようにも書くことができる.

補題 1

I で $h(x)$ が 2 階微分可能であるとする.
このとき,

$$h(x) : I \text{ 上で凸関数} \iff h''(x) \geq 0$$

補題 2 (凸関数の特徴付け)

$h(x) : I$ 上で凸関数

$$\iff {}^{\forall}x_0 \in I \text{ に対して,}$$

$${}^{\exists}g(x) = ax + b \ :\ \text{線形関数}$$

s.t.

$$\begin{cases} h(x_0) = g(x_0) \\ {}^{\forall}x \in I \text{ に対し, } h(x) \geq g(x) \end{cases}$$

が成り立つ.

イェンセンの不等式の証明

証)
まず, 補題 2 において, $X_0 = \mathrm{E}[X]$ ととる.
「X の値域を含む...」という仮定から, この取り方により補題 2 が使える. (つまり, X_0 は I 上にある.)

この $X_0 = \mathrm{E}[X]$ に対して, $^{\exists}g(x) = ax + b$　　s.t.

$$\begin{cases} h(\mathrm{E}[X]) = g(\mathrm{E}[X]) \\ ^{\forall}x \in I \text{ に対し}, \ h(x) \geq g(x) \end{cases}$$

が成り立つ.
よって,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[h(X)] &\geq \mathrm{E}[g(X)] \\ &= \mathrm{E}[aX + b] \\ &= a\mathrm{E}[X] + b \\ &= g(\mathrm{E}[X]) \\ &= h(\mathrm{E}[X]) \end{aligned}$$

よって,

$$\mathrm{E}[h(X)] \geq h(\mathrm{E}[X]) \qquad \square$$

例題

E[logX] と $\log(\mathrm{E}[X])$
はどちらが大きいか? (ただし, $\mathrm{E}[X] > 0$ とする.)

解)
$h(x) = \log x$ とすると, $h'(x) = \dfrac{1}{x}$, $h''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ だから,
$h''(x) < 0$ である.
したがって,
$h(x) = -\log x$ と取り直せば, 凸関数を成す.
(以下イェンセンの不等式で, 区間 I は（0, ∞）としてよい.)
$\mathrm{E}[h(x)] \geq h(\mathrm{E}[X])$ より

$$\mathrm{E}[-\log X] \geq -\log(\mathrm{E}[X])$$

また,

$$\mathrm{E}[-\log X] = -\mathrm{E}[\log X]$$

となる.
よって,

$$\mathrm{E}[\log X] \leq \log(\mathrm{E}[X])$$

6　おまけ

今まで, $\mathrm{E}[x]$, $\mathrm{E}[x^2]$, ：1 次や 2 次のモーメントが存在するような確率変数 X や, その確率密度関数 ： $f(x)$ についてみてきた.

しかし世の中には, $\mathrm{E}[x]$ ： 期待値すら存在しない分布がある. しかも, 概形は明らかに期待値がありそうなのに期待値が発散してしまう. その例を見ていこう..
まずは次の性質をに入れておく.

定理

$\mathrm{E}[x^2] < \infty \longrightarrow \mathrm{E}[x] < \infty$
(2 次のモーメントが存在すれば 1 次のモーメントも存在する.)

証)　$\mathrm{E}[x^2] \leq (\mathrm{E}[x])^2$である.
(イエセンの不等式において $h(x) = x^2$ とすればよい.)

したがって　$\infty > E[x^2] \geq (E[x])^2$ より
$\mathrm{E}[x] < \infty$ が得られる.　□

(また一般に高次のモーメントが 1 つあればそれ以下のモーメントが全て存在することがわかる.)
ここでコーシー分布というものを以下のように定義する.

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \qquad x \in \mathbb{R}$$

また一般には Fx として一次変換したものがコーシー分布だがすべての正規分布が標準正規分布に標準化されていたのと同様にこの $f(x)$ についてのみ調べればよい

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \text{ を確かめる.}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$$

(ここで $x = \tan\theta$とおき　θ ： $-\frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{2}$)

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^2\theta} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}[\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

($f(x)$ の期待値)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[x] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} dx \\
&= \frac{1}{2\pi}[\log 1+x^2]_{-\infty}^{\infty} \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{a,b\to\infty} \log(1+a^2) - \log(1+b^2) \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{a,b\to\infty} \log\frac{1+a^2}{1+b^2} \\
&= \text{不定}
\end{aligned}
$$

すなわち期待値が発散し定まらない.

参考文献

鈴木武 山田 作太郎 共著 『数理統計学』 (内田老鶴圃)

$\mathcal{F} \subset C(X,\mathbb{R})$ が一様有界 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $^{\exists}\mathrm{M} \in \mathbb{R},\ ^{\exists}a \in \mathbb{R}\ s.t.$
$^{\forall}f \in \mathcal{F},\ ^{\forall}x \in X,\ |f(x)-a| \leq \mathrm{M}$.(consome)

Column Part3　【数研部員に聞いてみた】

好きな音楽家は？(理由)

かめりあ (BPM で船酔いした) 高嶋ちさ子 (面白い.) 松下耕 (いい曲かいてますよ〜)
2nn(すきなので) wowaka(生き返って) 平沢進 (経歴がスゴい) ホルスト (ジュピター)
Greeen(全体的に良いから) モーツァルト (トルコ行進曲が好き) Chopin(いい曲多い)
ベートーベン (圧倒的な毛量)(ジャジャジャジャーン) サカナクション (好きだから)
アイドリッシュセブン (皆インストールしてください.) バッハ (名前がかっこいい)
秋元康 (たくさん詩を書いているから.) flower(歌だけ好き、メンバーは知りません)
はぎわらさん (モーツァルトァだから) さむらごうち (あいつはいい曲をかく)
ショパン (「雨だれ」が好きだから) Aimer(いい感じに病んでる)
三松先生 (写真がそれっぽいから)

あなたの得意な暇つぶしの仕方？(理由)

御勉チャラ (他に能が無い) 鬼ごっこ (楽しいから) Youtube(いろんな動画がある)
一人回し (小学生のころからやってる。) *Twitter*(ツイッター) 深呼吸 (呼吸は基本)
モンスト (やることが多いから) 踊り (TWICE の Heart Shaker ならいくらでも踊る)
寝る (時がとぶ)(夢で出会えるから (健吾さん)) 仮想友人と会話するやつ (結構話合う)
マリカー (最近ハマってる) アベマ TV で麻雀を見る.(M リーグとか RTD とか鳳凰戦とか)

好きな論理記号は？(理由)

$\forall$(え、そんなん、ねー)(顔文字でよく使うから.)($\forall$ ガンダムがあるから.)(幻想郷は $\forall$ を受け入れるのよ. それはそれは残酷な話ですわ)　$\exists!$(あいさつみたい.) $:=$(見た目)
$\equiv$ (人類みな同値) $\blacksquare$(何もかも終われ) ∂(境界を表すから (決して偏微分ではない))
$\Rightarrow$ (*naraba* から資料をダウンロードできます) $\in$(形が好き、かきやすい)
$\preceq$(なんかかっこいい) $\subsetneq$(書いていて楽しい)

ψ ←この記号について 読み方は？ (どう思うか？)

プサイ (シュッとしてますね〜. はい)(釜山に似ている)(かきにくい、嫌いである) ~~プサイ~~
プ音記号 (なんか楽譜に書いてありそう) くにょっとして棒 (･ω･`　) 梨汁 (プシャー)
ハープ (俺の書いた「天気の子」見てくれよね！) /psi(第 2 の順同型写像)
ファイ (律川さんがよく書いている.) さすまたの進化系 (いたいとおもう.)
トライデント (ポセイドンが持ってるやつ。痛そう。) サイコパス (やべーやつ)
しゃみ子が悪いんだよ (桃はそんなこと言わない！)(原作アニメで言ってないだけで、実際は言ってる。) ハギ (はぎわらさんみたい)　うぜぇ(読めません、教えてください)

たくさんの回答ありがとうございました。(機関誌担当)

少年の夢2019

3 年　植元 雅斗　縫島 唱吾
田嶋 翔太　館野 誠

ゼミ紹介

我がゼミは R 言語で様々なことを試すという日々を送りました. R がどんなものなのか, 詳しくは Go◯gle や参考文献を参照して頂きたいですが, 一言で言うと「統計したい人はこれ使っとけ！」と数学科の三人に二人, つまり人類の 66% に言われる (これをサンプルセレクションバイアスと呼びます) 統計ソフト及びプログラミング言語です. というわけで R でできることをいくつか R をわかっている体でコマンドを添えて紹介します.

これだけ書いてもたぶん私たちの班がどんな班なのかいまいち伝わらないと思ったのでこんな話をしてみます, 今これを読んでいるあなたが数学研究部の身内かどうかわかりませんが, まあどうせ身内しか読まないんですけど, 身内ではないと仮定して, この機関誌がどのように作られているのかご存じでしょうか? 軽く説明しましょう.

まず, 前期に班に分かれてゼミをします. そこで数学の各分野の研究をしていくわけですね. そして後期になったら前期のゼミの研究内容を TEX というフリーソフトで各班がそれぞれ PDF 形式にまとめていきます. そうしてできた PDF ファイルを担当が集めて修正したりなんだりして, 出版社に依頼して本にしてもらっています. 今回はその各班の原稿の締め切りは 2019 年 10 月末, つまり 10 月 31 日でした. そしてこれを書いているのは 2019 年 10 月 29 日です. 普通に 2019 年 10 月 29 日に書き始めました. つまりはそんな班です.

でもこの文章をあなたが読んでいるということは無事締め切りに間にあったということでしょう. 良かった, 良かった, まあこれを書いている今この瞬間は全く良かってないんですけど, ぶっちゃけ本編に書く内容がまとまってなくて現実逃避としてこのゼミ紹介を書いているのが現実なのですが, この文章をあなたが読んでいるということは, 本編の内容をどうにかまとめてそれなりのものができているということでしょう. そうですよね? この文章ちゃんと機関誌に載ってますよね? そうだといいんだけど, 誰にも読まれることの無い文章を延々部室で一人書いてるという可能性もあるんだよなぁ. それってあまりにも虚しくないですか? まったく一体なんでこんなことになってしまったんだ! この文章が誰かにちゃんと届くのかはたまた届かずに僕の PC の中で静かに朽ちていくか現時点じゃわかりませんね, そろそろ本編を真剣に考えないと後者に運命が収束すると僕の第六感が訴えています. こんなところで終わる気は毛頭ないので, 現実逃避もといゼミ紹介終わります. まあつまりはこんな班です.

見たことありそうでないものシリーズ㉓Line のメッセで「びえん」の後に (T_T) って打つ人（↑m *φcchan*）

グラフの生成

「なんだい いきなり Excel でもできることを書くじゃねい」とツイートしたあなたクソリプとばしますよ. こっちには時間がないんですよ.

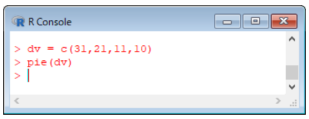
(1) 円グラフ : パイを切り分けよう.
パイを切り分けます. はい.

```
$ dv=c(31, 21, 11, 10)
```

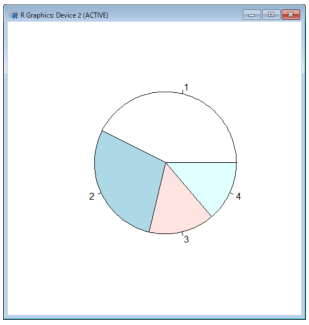
こう入力します. 文字数を稼 g· · · もとい何をやっているのかわからない人のために解説をすると, $(31, 21, 11, 10)$ という要素を持った dv という名前の集合を作りました. dv は集合の名前なのでほとんど何でもいいです. 自分の苗字でもいいです. 因みに dv は家庭内暴力では無く division(区分) の略です. ちなみに「因みに」は「ちなみに」と読みます. 一つ賢くなりましたね. もうこれ以降は得るものはないと思うので読み飛ばしてもらって結構です.

```
$ pie(dv)
```

dv という集合を円グラフで表示します. 詳しい説明をするより実行結果を見たほうが早いと思います. 別に説明が面倒なわけじゃないんだからね///



コマンド↑



実行結果↑

一つ目の要素が全体の $\frac{31}{73}$ 二つ目の要素が全体の $\frac{21}{73}$ といった具合の円グラフが完成しました. これであなたも今日から円グラファーです.

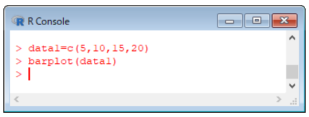
(2) 棒グラフ：別に積み木ではない.

$ data1=c(5, 10, 15, 20)

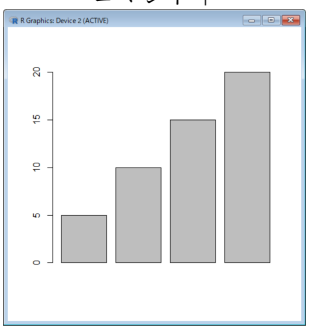
data1 という名前の集合を作ります.

$ barplot(data1)

棒グラフを書きます. 詳しい説明を (ry



コマンド↑



実行結果↑

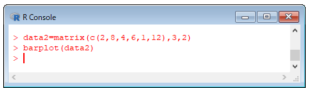
特筆することもないですね. 普通の棒グラフはこれで問題ないです. 他のタイプの棒グラフを書いてみましょう.
それともう気付いてしまったかもしれませんが, 我が班が今回採用したページ数を稼ぐための秘密兵器がこの「コマンド」と「実行画面」です. まさに天才的発想, これはもう特許申請するしかないですね.

$ data2=matrix(c(2, 8, 4, 6, 1, 12), 3, 2)

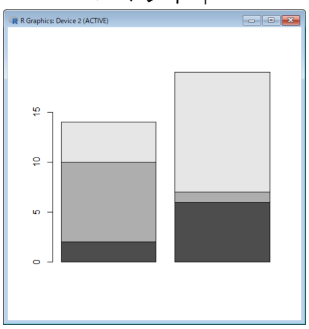
3 行 2 列の行列を作ります. 書き方が若干ややこしいですが, 1 列目の成分が 2, 8, 4 で, 2 列目の成分が 6, 1, 12 です.

$ barplot(data2)

行列を棒グラフにすると以下のように積み上げ型のグラフになります.



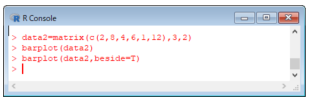
コマンド↑



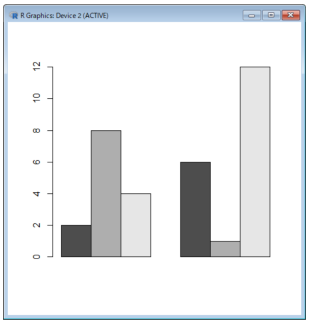
実行結果↑

```
$ barplot(data2,beside=T)
```

また beside を True に設定すると各列ごとの棒グラフになります.



コマンド↑



実行結果↑

これでだいたいの棒グラフが書けるようになりましたね. これであなたも今日から棒グラファーです.

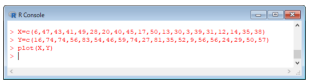
回帰分析

「やっと R らしいことし始めたか」とツイートしたあなた. クソリプとばしますよ. こっちは必死なんですよ.

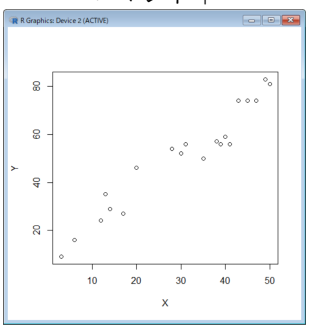
回帰分析とは「ある事柄の変化を別の事柄の変化を用いて予測, 説明すること」です. 例えば明日は気温が高くなるのでアイスクリームが今日より多く売れるだろうと予測する等が挙げられます. このように一つの要素の変化から他の要素の変化を分析することを単回帰分析と呼び, 明日は気温は高くなるけど, 月曜日だから今日よりアイスクリームは売れないんじゃないかと, 二つ以上の要素の変化から他の要素の変化を分析することを重回帰分析と呼びます. 今回はページの都合上 (本当は実力の都合上) 単回帰分析の線形回帰 (一次式で近似) のみを行います.

```
$ X=c(6, 47, 43, 41, 49, 28, 20, 40, 45, 17, 50, 13, 30, 3, 39, 31, 12, 14, 35, 38)
$ Y=c(16, 74, 74, 56, 83, 54, 46, 59, 74, 27, 81, 35, 52, 9, 56, 56, 24, 29, 50, 57)
$ plot(X,Y)
```

適当な x と y に関する散布図を作ります.



コマンド↑

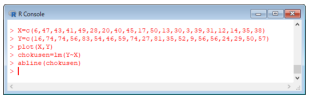


実行結果↑

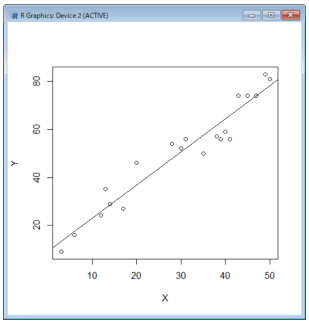
何となく直線で近似できそうですね.

```
$ chokusen=lm(Y~X)
$ abline(chokusen)
```

このデータに対する尤もらしい直線を引きます.



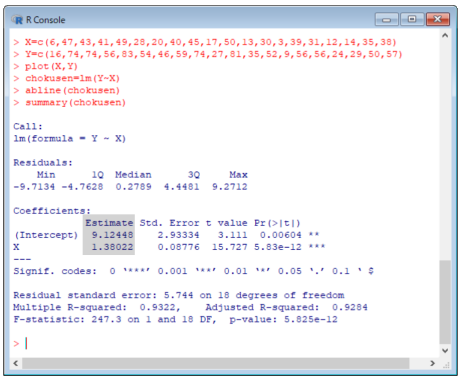
コマンド↑



実行結果↑

Y=AX+Y としたとき傾き A と切片 B はそれぞれ
傾き:A=$\frac{\mathrm{Cov(X,Y)}}{{\sigma_X}^2}$
切片:B=$\mu_Y - A\mu_X$
となります.
ただし, μ_X, μ_Y, ${\sigma_X}^2$, Cov(X,Y) はそれぞれ X の平均値,Y の平均値, X の分散, X と Y の共分散
具体的に調べるには以下のようにします.

```
$ summary(chokusen)
```



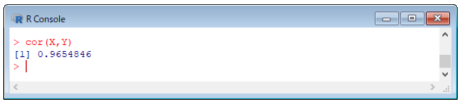
色々と出てきましたが Estimate の欄に書いてある 9.12448, 1.38022 がそれぞれ切片と傾きです. よってこの場合

$$\mathrm{Y} = 1.38022\mathrm{X} + 9.12448$$

これがこの X と Y を近似した式となります.

```
$ cor(X,Y)
```

相関係数を表示させます.



相関係数は -1 から 1 の値をとり相関が弱ければ 0 に近づきます. 今回の相関係数は 0.9654846 とだいぶ 1 に近いので尤もらしい直線と言って良いでしょう.
この式を用いると x が 25 のときは y は約 47 であると推測できます. この時, 観測された X の範囲を超えた値を代入すると正しく推測できません.

参考文献

奥村晴彦 『R で楽しむ統計』 (共立出版)

～メモ帳～

Column Part4　【続　数研部員に聞いてみた】

あなたが数研に入った理由は？

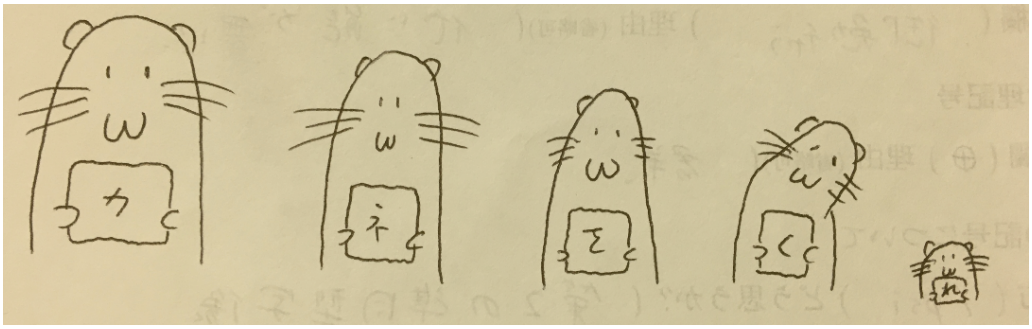
気付いたらいた (末期)/ 情報も盛りだくさんだし, みんな楽しそうやもん./ そこにデュエリストがいたから/ 面白い人がたくさんいた！/ 数学できないから/ そういう定めだった./ 数学が好きだから/ 高々可算集合に憧れて · · · / 数学をもっと知る為, 理解する為/ 数学が好き/ なんとなく/ 数学科の先輩と仲良くなりたかった/ 変な人が集まると思ったから./ 馬鹿と煙は高いところにのぼるから./ (終)/ はぎわらさんがいたから/ 数学科の定め/ 先輩のツテが欲しかったから/ ノリ/ 数学がもっと好きになるため/ 数学科はほとんどの人が入る雰囲気だったから/ 数学を真面目にやろうと思ったから (なお (略)/ 数研がそこにあったから/ 前世からの因縁/ 自明/ 天下を取るため/ 難しいが, シンパシーを感じた/ バイトが少なくなったから/ 過去問のため/ 数学科なら入るもんだと思っていた/ 数学科の必修科目だと思ったから/ 見学自由だから/ 高所恐怖症だから/ 独学では行き詰まってしまった · · · / なりゆき

数研のいいと思うところ、良かったところ

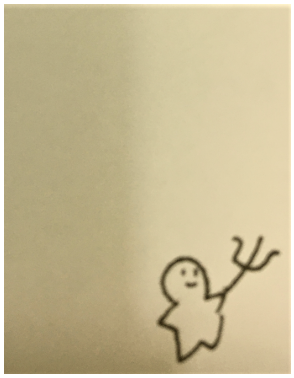
た こ が い る/ TEX に厚いの良いね/ ボードゲームができる/ 使い方いろいろ, ズガガギゴゴ/ うーん、仲いいんじゃない？/ 電気ケトルや電子レンジがあること./ 上下関係がしっかり良い　先輩がやさし〜/ 11 階/ 仲が良い./ 個性的なメンバーが多い/ 授業の予習ができるところ, 先輩と仲良くなれたこと./ 十人十色/ ボードゲーム支部があった/ おじさん JK(27)/ はぎわらさんと出会えた/ 可愛い後輩がいっぱいいる♡/ 部室が使える./ 頭が良すぎる先輩と知り合えた！感謝しかない/ 先輩に聞ける/ ワイワイ/ 最近はボドゲもおいてあり楽しい. 雰囲気があったけぇ · · · / お茶が飲める所/ ボードゲームサークル/ $\lim_{n\to\infty}$ 変人が $(very)^n$ 多い/ スカイツリーが見えていた過去があること./ なまあたたかい/ 個性があるところ/ なし/ 部室に行けば無限に時間をつぶせる/ アットホームなところ/ 下界の民を見下せるところ./ ティファールがある/ 東横インが見える/ みんな優しくて, どこかしら普通ではないところ/ ホワイトボード

～メモ帳～

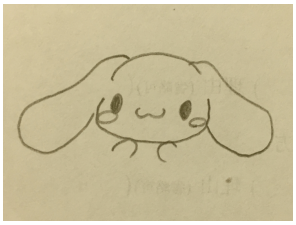
おまけイラストコーナー



(トワ)



(やた)



(みぃ)

数研部員の主張

$\pi \neq 3$ の証明

$\pi = 3$ と仮定
両辺におっ $\neq 0$ をかけると

$$\text{おっ}\pi = \text{おっ}\ 3$$
$$\text{おっぱい} = \text{おっさん}$$

となり, これは明らかに矛盾.

$$\therefore \pi \neq 3 \qquad \square \text{ (Eriale)}$$

$\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$ の証明

$$\frac{\not{d}}{\not{d}x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{}{x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \ \square \text{ (Eriale)}$$

Y:確率変数が指数型分布族に属すとき,

$$f_{(y:\theta)} = \exp(a_{(y)}b_{(\theta)} + c_{(\theta)} + d_{(y)})$$
$$(^{\exists}a, b, c, d : \text{実関数},\ \theta : \text{パラメータ})$$

と表される.
正規分布, 二項分布, ポアソン分布など, 多数がこれに属する.
これに関する統計的理論は美しい.

$$\mathrm{E}[a_{(y)}] = -\frac{c'_{(\theta)}}{b'_{(\theta)}},\ \mathrm{V}[a_{(y)}] = \frac{1}{b'}(-\frac{c'}{b'})' = \frac{1}{b'}(\mathrm{E}[a_{(y)}])'$$

(「'」は θ に関する微分)

スコア統計量 $\mathrm{U}_{(\theta)} = a_{(y)}b'_{(\theta)} + c'_{(\theta)} = \frac{\partial}{\partial\theta}(\log f_{(y:\theta)})$
に関する期待値:$\mathrm{E}[U_{(\theta)}] = 0,\ \mathrm{V}[U_{(\theta)}] = -\mathrm{E}[U'_{(\theta)}]$
となる. そして, それらの証明はとてつもなく簡素である.

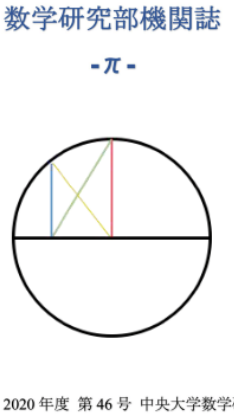
a, b, c, d は重要な順番で並んでいる.

$a_{(y)} = y$ のとき, $b_{(\theta)}$ のことを自然パラメータというが, ひょんなときに出てくるのに自然であるとする真理までたどりつければよい. (ぴろ)

～メモ帳～

おまけ
作るのが間に合わなかった表紙案+α

機関紙完成直前に皆さんに募集した表紙案のなれの果てです.
機関誌の表紙画像は基本的に自分で作らねばならないのですが, 最初の 1 つ (実際に表紙になったやつ) を作ったのち, 意外とやることが残っていてこれ以上作る時間がありませんでした. 最後ページが余ったので, 残りの案を一部作ってみました.
+α (1 番最後のやつ) は機関誌担当のラインで聞いた時, 先輩が 10 分程度で作り上げたものです. すごいですね.



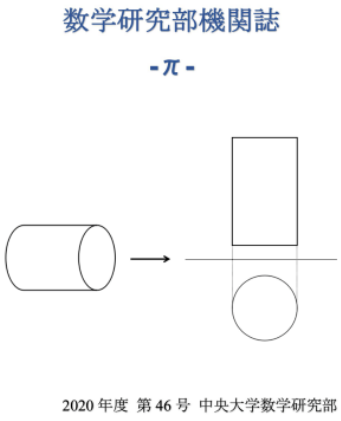
「調和平均と算術平均と幾何平均を同時に, 円を使った幾何学的解釈 (構成)」(ぴろ)

「ペンローズの三角形」(Eriale?)

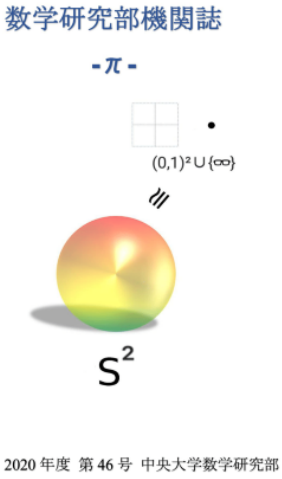
他に「フラクタル図形」,「フランク・モーリーの定理の図形」の案を頂きました.

例年の表紙の傾向から多色を使えるような画像にしたほうがよくて, もう少し手を加えないといけないためここで諦めました.

表紙になった図形は適当な不可能図形 (ペンローズの三角形もこれの 1 種) を多色になるように並べたものです.(機関誌担当)



「円柱の投影図」($m\phi cchan$)



「1 点コンパクト化」(consome)

他に「正五角形の作図」,「ドーナツの全体図」,「部長の指紋」等の案を頂きました.

作者の意向により, 完成度は高いと思うけど表紙にしませんでした.
実はメガネが隠れているのですが, 気付きましたか？

編集後記

伊藤 良太郎

こんにちは, 機関誌担当の伊藤です. 今回の機関紙作成では主に各班の原稿をチェックしたり, 機関誌の細かい中身を作っていました.

まずは機関誌を手に取って頂き, またわざわざこの編集後記にまで目を通すほど読み込んでくださりありがとうございます.

今年度の機関誌作成は振り返ってみると担当の一人（私）が引き継ぎ会議に出られなかったり, 引継ぎ後先輩に確認されるまで全く活動をしていなかったりと活動初期から前任者の機関誌担当の先輩を不安にさせるような意識の低さで心配をかけたと思います. すみませんでした.

私は全ての作業を終えてからこの編集後記を書いていますが, 正直今年度の機関紙作業は機関紙担当どうしで上手く連携をとることができず, 互いにギクシャクしながら機関誌作成をしていたと思います. 他の 2 人の機関誌担当は何をしたらよいか分からない時期が多くて不安だったと思います. 申し訳ないです. 不運もありましたが, 絶対もっと上手くやれたよなぁと只今反省中です.

しかし, 過程はどうであれ今年も機関誌は完成しました. 自分で自分の首を絞める形で大変な機関紙作業でしたが, たくさんの経験を得ることができたので完成させた今はやってよかったと思います. ちょうど今ぐらいの時期に次年度の機関誌担当が決定していると思いますが, 来年度の機関誌作成も頑張ってください. 私も先輩がしてくれたように次年度の機関誌作成についていつでも相談に乗るので, 何でも聞いてください.

話は変わりますが機関誌作成の最後の追い込み時期になっている 3 月が今年は新型コロナウィルスのせいで部室で作業することができず, 終盤の作業を自宅で行っています. その際に問題となることに家のパソコンに TEX 環境を整えるのがめんどくさいということがあるのですが, overleaf というクラウドサービスが楽でしたのでお知らせしておきます. 気になった方は是非調べてみてください.

最後になりますが, 他の機関誌担当の 2 人, 機関誌担当の先輩, 数研部員の皆さん, この機関紙を作るのにかかわったすべての人に感謝の気持ちを記して終わりたいと思います. 本当にありがとうございました.

根本　涼帆

こんにちは！つい一か月前にハタチになりました根本です。最近はチョコ依存症かなと思うくらいひたすらにチョコばかり食べています。ホワイトデーは本当に素敵な行事ですね。

戻ります。
私はアンケート作成しました！！
よく言えば個性豊か、悪く言えばみんな自分勝手というか、まとまりのない、まあでもある意味でまとまりのある数学集団だなと（どっちやねん）今回アンケートの回答結果を見て思っていました！
個性豊かすぎてもっと回答まとまってほしいとまで思いました。まあでもきっとこう感じるのも機関紙担当あるあるなのかな、としみじみしときます。
箸休めコーナー（コラムコーナー）は、「あーーね」「なるほどね」「おもろいね」みたいに思っていただけてたら嬉しいです。自分なりにちょっと聞いてみたいことを盛り込んだアンケートだったので！（好きな音楽家とか好きな音楽家とか）みんなに聞いてみたかったのです喉から手がでるほどとても…

自分の班の機関紙は教科書かな？と思うほどたくさんページ数稼いでしまいました。なんか教科書のまんま生き写しみたいに。ここで謝罪するのは違うとは思いますが、なんかたくさん書きすぎてすんません。そしてこの謝罪で行数をかせがせていいただいています。すんません。

最後に、機関紙担当をまともに動かしてくれた伊藤くん本当にありがとうございます。おそらくリアルに自分の 15 倍くらい仕事をしてくれて…お疲れ様でした。自分はいまだ TeX に対して嫌だなあああああと思う気持ちがあります。すみません。
次年度の機関紙担当になる方、頑張ってください。ほかの人たちとは仕事量が大きく違いますので。でもみんなの努力の結晶集めるのもきっと悪くないですよね☆

ここまで読んでくれた方！いたらとてもありがとうございます！これからの時間有意義に使ってくださいね！

部員一覧

4年生	浅里 一輝	生島 功貴	入山 彩音	桐田 伶音	河野 恭宏
	鈴木 里麻	鈴木茉莉亜	染宮 めぐ	高見 英汰	塚本 裕介
	野原 丈司	細井 彩加	松崎 隆太	南浦 春香	
3年生	秋沢 求	浅賀 春貴	井上 明俊	岩崎 航平	植元 雅斗
	小粥 和貴	岡田 浩昭	小作 惇也	佐藤 圭一	田嶋 翔太
	館野 誠	縫島 唱吾	萩原 雄一郎	古田 旭宏	柳 涼空
2年生	荒田 健翔	伊藤 優太	伊藤 良太郎	岩田 健吾	牛木 京平
	梅田 弘海	大垣 怜以	大坪 翔	大橋 拳斗	大八木 宥妃
	尾熊 涼	五位渕 巧	小宮山健太	上乗 翔也	鈴木 あみ
	鈴木 由依	滝本 千里	竹山 和季	中畝 芽衣	夏苅 歩夢
	根本 涼帆	信国 爽香	原田 好輔	福田 光紗	藤原 迅
	松本 亜弓	味元 翔平			
1年生	青木 隆星	青木　佑斗	赤田 莉奈	秋葉 翔太	伊藤 遼太
	梅澤月奏	大里 真一	大辻 泰聖	片岡 岳	小池 雄河
	小林 紀貴	小林　夕夏	佐川　夏美	佐久間 涼平	佐々木 侑香
	鈴木　恒輝	鶴口 泰寛	中村 光太郎	蓮沼 慧星	半田 卓也
	松岡 郁也	宮本 泰彰	谷部達也	山崎もも	米倉 来誠
	渡邉 陽登				

数学研究部　機関誌　「π」第 46 号

発行　　2020 年 3 月 20 日

中央大学数学研究部

文京区春日 1-13-27

編集　π 編集委員会一同

印刷・製本　　恒信印刷株式会社